Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 13.10.2020

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 97 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\,\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partielle Integration

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^3+4x^2-1}{x^4+2x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y' + \cos x = y\cos x,\ y(0) = 1.$

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 4y' + 4y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 4y' + 4y = \sin x$.

Aufgabe 4 (8+2+3 = 13 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
c) Bestimmen Sie $A^{10}\vec{x}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$4(x^2 + y^2) - 10xy = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 6 (10 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 - xy - \frac{y^4}{4}\,.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f d.h. alle (x, y) mit $(\nabla f)(x, y) = (0, 0)$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (2+6 = 8 Punkte)
Wir betrachten die Kurve

$$\mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2t)\cos t \\ \sin(2t)\sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < \frac{\pi}{2}\,,$$

a) Zeichnen Sie die Kurve.
b) Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.
   Hinweise: Polarkoordinaten sind hilfreich. Sie dürfen $\int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ verwenden.

Aufgabe 8 (8 Punkte)
Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{M}$, d.h. $\int_{\mathcal{M}} \mathrm{d}V$, für

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} |z| \le 3 \\ x^2 + y^2 - z^2 \le 1 \end{matrix} \right\}.$$

Hinweis: Polarkoordinaten (in der xy-Ebene) sind hilfreich.

Aufgabe 9 (8 Punkte)
Sei $\mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $0 \le t < 2\pi$, und sei $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sin z - x^2 y \\ xy^2 \\ \mathrm{e}^{xyz} \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$. Hinweis: Ein Integralsatz ist hilfreich.

Aufgabe 10 (5+3 = 8 Punkte)
Die $k$te von n Urnen enthält k schwarze und $n - k$ weiße Kugeln. Eine der Urnen wird zufällig ausgewählt und eine Kugel daraus gezogen (jede Urne und jede Kugel darin mit gleicher Wahrscheinlichkeit). Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

$$A_k = \text{“Die } k\text{te Urne wird ausgewählt”}$$
$$S = \text{“Es wird eine schwarze Kugel gezogen”}$$

a) Geben Sie $P(A_k)$ und $P(S|A_k)$ an, und berechnen Sie $P(S)$.
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die $k$te Urne ausgewählt wurde, wenn eine schwarze Kugel gezogen wurde?