Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
26.04.2021
Blatt 01

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 01. Wir betrachten die *Einheitskreislinie*

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$$

und $\mathbb{C}^*$ als Gruppe bzgl. der multiplikativen Struktur der komplexen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}^*$ das Inverse $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ durch $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gegeben ist und dann, dass $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ eine Untergruppe ist.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nennt man $\omega \in \mathbb{S}^1$ eine n. *Einheitswurzel*, wenn gilt: $\omega^n = 1$. Bestimmen Sie alle n. Einheitswurzeln in Polarform $\omega = e^{i\varphi}$ (mit $\varphi \in [0, 2\pi)$) und zeigen Sie, dass $U_n := \{\omega \in \mathbb{S}^1 : \omega^n = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathbb{S}^1$ ist. Machen Sie eine Skizze dieser n. Einheitswurzeln.

Lösungsvorschlag. (a) Aus der Definition des Betrages mit $|z|^2 = z\bar{z}$ folgt durch Division von $|z|^2 z$ auf beiden Seiten unmittelbar:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Für $z, w \in \mathbb{S}^1$ folgt wegen der Multiplikativität des Betrages

$$|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1,$$

also ist auch $zw \in \mathbb{S}^1$. Und mit $z \in \mathbb{S}^1$ ist wegen

$$|z^{-1}| = |\frac{\bar{z}}{|z|^2}| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = |\bar{z}| = |z| = 1,$$

also ist auch $z^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Das zeigt, dass $(\mathbb{S}^1, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ ist.

(b) Jedes $\omega \in \mathbb{C}^*$ kann man mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig in Polarform $\omega = re^{i\varphi}$ schreiben. Die Bedingung $\omega \in \mathbb{S}^1$ bedeutet dann gerade, dass $r = 1$ ist, denn $r = |\omega|$. Nun ist

$$e^{i \cdot 0} = 1 = \omega^n = (e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$$

nach der Funktionalgleichung der e-Funktion (auch im Komplexen). Es muss deshalb für $\omega \in U_n$ gelten:

$$n\varphi \equiv 0 \bmod 2\pi,$$

d.h.: $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Das ist für $\varphi \in [0, 2\pi)$ genau dann der Fall, wenn

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{k}{n} \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

ist. Setzen wir $\omega_0 := e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so sind also die Lösungen von $\omega^n = 1$ durch

$$\omega_0, \omega_0^2, \ldots, \omega_0^{n-1}, \omega_0^n = 1$$

gegeben. Das ist eine Untergruppe, weil

$$\omega_0^k \cdot \omega_0^l = \omega_0^{k+l},$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ ist und deshalb $\omega_0^{n+k} = \omega_0^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

[Anmerkung: Die Abbildung $\mathbb{Z} \to U_n$, $k \mapsto \omega_0^k$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und hat Kern $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Nach dem Homomorphiesatz ist daher $U_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die *zyklische Gruppe der Ordnung* n.]

Die Elemente von $U_n \subseteq \mathbb{S}^1$ bilden also ein regelmäßiges n-Eck (mit Umkreis $\mathbb{S}^1$) und $1 \in \mathbb{S}^1$ gehört dazu. (Skizze)

Aufgabe 02. (a) (Abelsches Lemma) Sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine formale komplexe Potenzreihe (d.i.: $a_n \in \mathbb{C}$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$), die in einem $z_0 \in \mathbb{C}^*$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ gilt: $P(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut. (Hinweis: Majorisieren Sie $\sum_0^{\infty} |a_n z^n|$ mit einer geometrischen Reihe.)

(b) Den *Konvergenzradius* $R_P \in [0, \infty]$ einer formalen Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ kann man so definieren:

$$R_P := \sup\{r \in [0, \infty) : \text{ es gibt ein } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r, \text{ so dass } P(z) = \textstyle\sum_n a_n z^n \text{ konvergiert}\}$$

$\in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

(i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R_P$ konvergiert $P(z)$ absolut;

(ii) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_P$ divergiert $P(z)$.

Lösungsvorschlag. (a) Ist P in z_0 konvergent, so müssen die Summanden $a_n z_0^n$ der Reihe $P(z_0)$ beschränkt sein (sogar eine Nullfolge). Sei daher $M > 0$ so, dass $|a_n z_0^n| \leq M$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ beliebig, so ist $\theta := \frac{|z|}{|z_0|} < 1$ und es ist

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z_0|^n \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} = |a_n z_0^n| \cdot |\frac{z}{z_0}|^n \leq M\theta^n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = M \frac{1}{1-\theta} < \infty$$

ist und damit $\sum_n a_n z^n = P(z)$ absolut konvergent.

[Anmerkung: Erinnern Sie sich, dass absolute Kovergenz immer Konvergenz der Reihe nach sich zieht, weil die Partialsummen der Reihe dann eine Cauchy-Folge bilden und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ vollständig ist,

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{m} a_k| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon,$$

für m, n $(m \leq n)$ groß genug.]

(b) (i) Sei $R = R_P \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von P und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Es gibt nach Definition des Supremums ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0| < R$, so dass P in z_0 konvergiert. Nach Abels Lemma (Teil (a)) konvergiert dann P auch in z (und dort sogar absolut).

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$, so kann nach Definition von R die Reihe P in z nicht konvergieren, divergiert dort also.

Aufgabe 03. Wir betrachten die Einbettung $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass es keine Multiplikation $*$ auf $\mathbb{R}^3$ gibt, die $(\mathbb{R}^3, +, *)$ zu einem Körper macht und mit der Vektorraumstruktur von $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ verträglich ist, d.h.: $x \cdot v = \tau(x) * v$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^3$. (Hinweis: Betrachten Sie für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L_v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $w \mapsto v * w$, und benutzen Sie, dass jedes reelle Polynom 3. Grades eine reelle Nullstelle besitzt.)

Lösungsvorschlag. Ist $*$ eine innere Multiplikation auf $\mathbb{R}^3$, welche mit $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ als Vektorraum verträglich ist, so ist jede Linksmultiplikation mit einem Element $v \in \mathbb{R}^3$,

$$L_v\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, L_v(w) = v * w,$$

$\mathbb{R}$-linear, denn für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ ist

$$L_v(w_1 + w_2) = v * (w_1 + w_2) = v * w_1 + v * w_2 = L_v(w_1) + L_v(w_2)$$

nach dem Distributivgesetz, wenn $(\mathbb{R}^3, +, *)$ ein Körper ist, und für alle $x \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathbb{R}^3$ ist

$$L_v(x \cdot w) = v * (x \cdot w) = v * \tau(x) * w = \tau(x) * v * w = x \cdot (v * w) = x \cdot L_v(w)$$

nach dem Kommutativgesetz für $*$. Das charakteristische Polynom von L_v ist ein reelles Polynom vom Grad 3 und hat deshalb eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ (was man leicht aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen sieht). Es ist λ daher ein Eigenwert von L_v, d.h.: es gibt ein $w_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$L_v(w_0) = \lambda w_0.$$

Das zeigt also

$$\tau(\lambda) * w_0 = \lambda \cdot w_0 = L_v(w_0) = v * w_0$$

oder

$$(v - \tau(\lambda)) * w_0 = v * w_0 - \tau(\lambda) * w_0 = 0.$$

Aber ein Körper ist nullteilerfrei und $w_0 \neq 0$, woraus $v - \tau(\lambda) = 0$ oder $v = \tau(\lambda)$ folgt. Aber wenn wir $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{im}(\tau)$ wählen, z.B. $v = (0, 1, 0)$, erhalten wir so einen Widerspruch. Solch eine Multiplikation $*$ kann es also nicht geben (allgemein auf $\mathbb{R}^n$ mit n ungerade (und $n \neq 1$) mit diesem Argument. [Anm.: Kein $\mathbb{R}^n$ (mit $n \neq 1$ und $n \neq 2$) trägt eine solche Körperstruktur.]