Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
03.05.2021
Blatt 02

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 04. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ reell-differenzierbar in $a \in G$. Begründen Sie, warum auch $\bar{f}\colon G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(z)}$, in a reell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}.$$

Lösungsvorschlag. Da $\mathrm{conj}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, reell-differenzierbar ist, ist mit $f\colon G \to \mathbb{C}$ auch $\bar{f} = \mathrm{conj} \circ f$ reell differenzierbar. Ist $f = u + iv$, so ist $\bar{f} = u - iv$ und weil die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ auf verktorwertigen Funktionen komponentenweise wirken, haben wir zunächst einmal (immer im Punkt $a \in G$):

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial x} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Das zeigt nun, dass

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} - i\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}\right) \\ &= \overline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $\bar{\bar{f}} = f$ auch

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial(\bar{\bar{f}})}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Aufgabe 05. Seien $D, G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, $f\colon D \to G \subseteq \mathbb{C}$ in $a \in D$ reell-differenzierbar und $g\colon G \to \mathbb{C}$ in $b = f(a)$ reell-differenzierbar. Begründen Sie, warum $g \circ f\colon D \to \mathbb{C}$ in a rell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a) = \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b)\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a),$$

$$\frac{\partial(g\circ f)}{\partial\bar z}(a) \;=\; \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial\bar z}(a)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}(a).$$

Lösungsvorschlag. Da f in a reell-differenzierbar und g in b reell-differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel auch $g\circ f$ in a reell-differenzierbar und es gilt:

$$D(g\circ f)(a)=Dg(b)Df(a).$$

Im Wirtinger-Kalkül gilt für $Dg(b)\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ und einem Vektor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ in komplexer Schreibweise $z=x+iy$

$$Dg(b)z=\frac{\partial g}{\partial w}(b)z+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\bar z.$$

Das zusammen ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial z}(a) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x}(a)-i\frac{\partial(g\circ f)}{\partial y}(a)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(Dg(b)\frac{\partial f}{\partial x}(a)-iDg(b)\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial x}(a)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\overline{\frac{\partial f}{\partial x}(a)}\right)-i\left(\frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial y}(a)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\overline{\frac{\partial f}{\partial y}(a)}\right)\right]\\
&= \frac{\partial g}{\partial w}(b)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)-i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\right]+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar f}{\partial x}(a)-i\frac{\partial\bar f}{\partial y}(a)\right)\right]\\
&= \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a)+\frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\frac{\partial\bar f}{\partial z}(a).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann auch mit $\overline{g\circ f}=\bar g\circ f$ und noch einmal Aufgabe 04:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(g\circ f)}{\partial\bar z}(a) &= \overline{\frac{\partial\overline{(g\circ f)}}{\partial z}(a)}=\overline{\frac{\partial\bar g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a)+\frac{\partial\bar g}{\partial\bar w}(b)\frac{\partial\bar f}{\partial z}(a)}\\
&= \frac{\partial g}{\partial\bar w}(b)\frac{\partial\bar f}{\partial\bar z}(a)+\frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial\bar z}(a).
\end{aligned}$$

Aufgabe 06. (a) Stellen Sie eine Produktregel für reell-differenzierbare Funktionen $f,g\colon G\to\mathbb{C}$ ($G\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet) im Wirtinger-Kalkül auf und begründen Sie sie.

(b) Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden reell-differenzierbaren Funktionen $f_j\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ($j=1,..,4$) und bestimmen Sie, wo diese komplex-differenzierbar sind:

$$f_1(z)=\bar z,\quad f_2(z)=|z|^2,\quad f_3(z)=\mathrm{Re}(z),\quad f_4(z)=2z^2\bar z-z\bar z^2.$$

Lösungsvorschlag. (a) Auch für komplexwertige reell-differenzierbare Funktionen $f,g\colon G\to\mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G\subseteq\mathbb{C}$ gilt die Leibnizregel in der folgenden Form: Auch $fg\colon G\to\mathbb{C}$,

$z \mapsto f(z)g(z)$, ist reell-differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(fg)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}, \\
\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.
\end{aligned}$$

Denn zunächst erfüllen die partiellen Ableitungsoperatoren $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ die Leibnizregel, da sie ja auf die Differentiation von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden. Deshalb ist nun für komplexwertige $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ und $g = \sigma + i\tau$ zunächst einmal

$$f \cdot g = (u\sigma - v\tau) + i(u\tau + v\sigma)$$

und daher (an jeder Stelle, wo f und g reell differenzierbar sind)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(fg)}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x} - i\frac{(fg)}{\partial y}\right) \\
&= \ldots = \frac{\partial f}{\partial z}g + f\frac{\partial g}{\partial z}
\end{aligned}$$

nach Aufsammeln von 16 Summanden und analog

$$\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.$$

Insbesondere ist für den Fall, dass f und g holomorph sind, auch fg holomorph und es gilt:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(b) Zunächst ist $f_1(z) = x - iy$ und daher

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial(x - iy)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} - i\frac{\partial(x - iy)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0,$$

und ähnlich

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(1 - i^2) = 1,$$

also ist f_1 nirgendwo komplex-differenzierbar. Mit der Produktregel aus Teil (a) ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial(z\bar{z})}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}\bar{z} + z\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 1 \cdot \bar{z} + z \cdot 0 = \bar{z}$$

und genauso

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}} = z.$$

Damit ist f_2 nur in $z = 0$ komplex differenzierbar. Wegen $f_3(z) = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ist

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}) = \frac{1}{2}$$

und ebenso

$$\frac{\partial f_3}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist f_3 nirgendwo komplex-differenzierbar. Schließlich rechnen wir für f_4:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial z} &= 4z\bar{z} - \bar{z}^2, \\ \frac{\partial f_4}{\partial \bar{z}} &= 2z^2 - 2z\bar{z} = 2z(z-\bar{z}).\end{aligned}$$

Letzteres ist gleich 0 offenbar genau wenn $z = \bar{z}$ ist, also für $z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 07. (a) Integrieren Sie $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, über den Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1+e^{it}$.

(b) Parametrisieren Sie die geradlinige Verbindungsstrecke von $-1 \in \mathbb{C}$ nach $1 \in \mathbb{C}$ mit einem Weg γ_1 und betrachten Sie mit $\gamma_2\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i(\pi-t)}$ einen weiteren Weg von -1 nach 1. Integrieren Sie nun die stetige Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = |z|$, über die Wege γ_1 und γ_2.

(c) Zeigen Sie, dass $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = \mathrm{Re}(z)$, keine Stammfunktion hat.

Lösungsvorschlag. (a) Für $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ist $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$. Es folgt

$$\gamma(t)^2\dot{\gamma}(t) = (1+e^{it})^2 ie^{it} = (1+2e^{it}+e^{2it})ie^{it} = i(e^{it}+2e^{2it}+e^{3it}).$$

Damit wird

$$\int_\gamma z^2\,dz = [e^{it} + e^{2it} + \frac{1}{3}e^{3it}]_0^{2\pi} = 0.$$

(Oder wir argumentieren so: Die Funktion $z \mapsto z^2$ ist auf der Kreisscheibe $B := B_2(1) \subseteq \mathbb{C}$ holomorph und γ ist ein geschlossener Weg in B. Deshalb muss $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ sein.)

(b) Für $\gamma_1\colon [-1, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$ ist $\dot{\gamma}_1(t) = 1$ und daher

$$\int_{\gamma_1} g(z)\,dz = \int_{-1}^1 |t| \cdot 1\,dt = 2\int_0^1 t\,dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Für $\gamma_2\colon [0, \pi]$, $\gamma_2(t) = e^{i(\pi-t)}$, ist $\dot{\gamma}(t) = -ie^{i(\pi-t)}$ und daher

$$\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_0^\pi |e^{i(\pi-t)}|(-i)e^{i(\pi-t)}\,dt = [e^{i(\pi-t)}|]_0^\pi = e^{i0} - e^{i\pi} = 1-(-1) = 2.$$

(c) Für den Kreisweg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, ist $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$, so dass wir rechnen können:

$$h(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \mathrm{Re}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(e^{it}+e^{-it})ie^{it} = \frac{i}{2}(e^{2it}+1).$$

Damit ist

$$\int_\gamma h(z)\,dz = \frac{i}{2}[\frac{1}{2i}e^{2it} + t]_0^{2\pi} = \frac{i}{2}2\pi = i\pi \neq 0.$$

Damit kann h keine Stammfunktion haben.