Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
10.05.2021
Blatt 03

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 08. (Lemma von Goursat für Dreiecke). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\triangle \subseteq G$ ein (abgeschlossenes) Dreieck in G. Zeigen Sie: Ist $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt: $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$. (Hinweis: Gehen Sie so vor wie in der Vorlesung für Rechtecke.)

Lösungsvorschlag. Man geht genau so vor wie bei den Rechtecken in der Vorlesung. Durch Verbinden der drei Seitenmittelpunkte erhält man vier Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$ und kann dann das Kurvenintegral über $\partial\Delta$ von f als Summe über die Kurvenintegrale über $\Delta_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, 4$) schreiben. Dann wählt man eines der vier Dreiecke aus — und nennt es Δ_1 —, bei dem der Betrag über das Kurvenintegral maximal ist. Dadurch erhält man:

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| \leq 4|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz|, \qquad L[\partial\Delta_1] = \frac{1}{2}L[\partial\Delta].$$

Diesen Prozess iteriert man und erhält so eine Schachtelung von Dreiecken $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz| \leq 4^n|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz|, \qquad L[\partial\Delta_n] = 2^{-n}L[\partial\Delta].$$

Nach dem Schachtelungsprinzip gibt es ein $a \in G$ mit

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = \{a\}.$$

Ab hier schließt man mit der komplexen Differenzierbarkeit von f in a genau so wie in der Vorlesung, um zu sehen, dass für große n der Betrag von $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$ beliebig klein wird.

Aufgabe 09. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. eines Punktes $a \in G$ (d.h.: für jedes $z \in G$ ist der geradlinige Weg $\gamma_z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)a + tz$, ganz in G). Sei weiter $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und derart, dass für alle Dreiecke $\triangle \subseteq G$ gilt: $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$. Zeigen Sie, dass dann durch $F\colon G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\;d\zeta,$$

eine Stammfunktion von f gegeben ist.

(b) Zeigen Sie nun (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete): Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Lösungsvorschlag. (a) Auch hier kann man wie in der Vorlesung bei dem Beweis des Satzes vorgehen, dass eine stetige Funktion, bei der alle Wegintegrale über geschlossene Kurven verschwinden, eine Stammfunktion hat: Ist $z \in G$ beliebig und $h \in \mathbb{C}$ so klein, dass $z + th \in G$ liegt, für alle $t \in [0,1]$, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten a, z und $z+h$ ganz in G. Da nach Voraussetzung $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ ist, kann man die Differenz $F(z+h) - F(z)$ als Integral über den (kurzen) geradlinigen Weg $\gamma_h\colon [0,1] \to G$, $t \mapsto z + th$, schreiben:

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_h} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Dann geht man wieder wie in der Vorlesung vor, um zu sehen, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z)$$

ist.

(b) Ist nun $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt nach Aufgabe 08 zunächst, dass $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ ist, für alle abgeschlossenen Dreiecke $\Delta \subseteq G$. Mit Aufgabe-09-a hat dann f eine Stammfunktion. Dann muss aber

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G sein.

Aufgabe 10. Sei $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und γ_z für jedes $z \in G$ der geradlinige Weg von 1 nach z in G. Wir nennen dann $\log\colon G \to \mathbb{C}$,

$$\log(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

den *Hauptzweig des Logarithmus*.

(a) Zeigen Sie, dass log ein Zweig des Logarithmus ist, d.h.: Für alle $z \in G$ ist $\exp \circ \log(z) = z$.

(b) Für jedes $z \in G$ sei $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ der Winkel in $(-\pi, \pi)$, so dass $z = |z|e^{i\arg(z)}$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $z \in G$ gilt:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z).$$

(Hinweis: Ersetzen Sie in der Definition den Weg γ_z durch den stückweise glatten Weg, der zunächst geradlinig von 1 nach $|z|$ läuft und dann auf dem Kreisbogen vom Radius $r = |z|$ von $|z|$ zu z (auf dem kürzesten Weg) und benutzen Sie Aufgabe 2b.)

(c) Geben Sie zwei Zahlen z_1, z_2 in G an, so dass auch $z_1 z_2$ in G ist und gilt:

$$\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2).$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Nach Aufgabe-09-a ist $\log\colon G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$,

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Nach der Kettenregel ist mit $\exp' = \exp$ (siehe auch Aufgabe-11):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\left(\frac{\exp\circ\log(z)}{z}\right) &= \frac{1}{z^2}((\exp'\circ\log(z)\log'(z)\cdot z) - (\exp\circ\log(z)\cdot 1)\\ &= \frac{1}{z^2}(\exp\circ\log(z) - \exp\circ\log(z)) = 0\end{aligned}$$

und nach Definition ist $\log(1) = 0$, also $\exp\circ\log(1) = e^0 = 1$. Damit ist

$$\frac{\exp\circ\log(z)}{z} = 1,$$

für alle $z \in G$. [Anmerkung: Eine holomorphe Funktion f auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, deren Ableitung verschwindet, $f' = 0$, muss konstant sein, $f = \text{const.}$, denn da sowohl $\partial f/\partial z = 0$ als auch $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ ist, verschwindet die Ableitung von f als reell-differenzierbare Funktion überall, $Df = 0$. Aber dann wissen wir aus der Theorie für mehrere reelle Veränderliche (mit dem Mittelwertsatz), dass f konstant sein muss.] Es ist also log damit ein Zweig des Logarithmus.

(b) Sei $\sigma_z\colon [0,1] \to G$,

$$\sigma_z(t) = (1-t)\cdot 1 + t|z| = 1 + t(|z|-1),$$

und $\tau_z\colon [0,1] \to G$,

$$\tau_z(t) = |z|e^{i\arg(z)t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_z}\frac{d\zeta}{\zeta} &= \int_0^1 \frac{|z|-1}{1+t(|z|-1)}\,dt = [\ln(1+t(|z|-1))]_0^1\\ &= \ln(1+|z|-1) - \ln(1) = \ln|z|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{\tau_z}\frac{d\zeta}{\zeta} &= \int_0^1 \frac{|z|\cdot i\arg(z)e^{i\arg(z)t}}{|z|e^{i\arg(z)t}}\,dt\\ &= i\arg(z).\end{aligned}$$

Da $\sigma_z \star \tau_z \star \gamma_z^-$ geschlossen ist, folgt

$$\log(z) = \int_{\gamma_z}\frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\sigma_z}\frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\tau_z}\frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i\arg(z).$$

(c) Sei z.B.

$$z_1 := z_2 := e^{\frac{3}{4}\pi i} \in G.$$

Dann ist $z_1\cdot z_2 = \exp(\frac{6}{4}\pi i) = -i$, also auch in G. Es folgt dann einerseits

$$\log(z_1) = \log(z_2) = \frac{3}{4}\pi i,$$

also

$$\log(z_1) + \log(z_2) = i \cdot \frac{6}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi i,$$

und andererseits

$$\log(z_1 z_2) = \log(-i) = -\frac{1}{2}\pi i.$$

Aufgabe 11. Wir definieren $\cos, \sin \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

und nennen diese Funktionen den *komplexen Cosinus* und den *komplexen Sinus*.

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen $D = \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\}$ von cos und setzen Sie $\tan \colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$. zeigen Sie dann, dass cos, sin und tan holomorph sind mit

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos, \quad \tan' = 1 + \tan^2.$$

(Hinweis: Benutzen Sie, dass $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und $\exp' = \exp$ ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Die Konvergenzradien der Cosinus- und der Sinusreihe sind jeweils $R = \infty$, da die reellen Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Nach Aufgabe-02 konvergieren sie dann auch für alle $z \in \mathbb{C}$, sogar absolut.

(b) (i) Wir rechnen mit der komplexen Exponentialreihe $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(iz)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(iz)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(i^2)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} z^{2n+1}, \end{aligned}$$

und das ist wegen $(i^2)^n = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i(-1)^n$ gleich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos z + i \sin z.$$

Die Umsummierung erst über die Summanden mit geradem n und dann mit ungeradem n kann man aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_n \frac{1}{n!}(iz)^n$ und dem großen Umordnungssatz (vgl. Analysis-3, Aufgabe-02) vornehmen.

(ii) Wegen $\cos(-z) = \cos z$, für alle $z \in \mathbb{C}$, weil die Potenzreihe nur von Null verschiedene Koeffizienten bei geraden Potenzen von z hat, und $\sin(-z) = -\sin z$, für alle $z \in \mathbb{C}$, aus ähnlichen Gründen, sehen wir aus

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \end{aligned}$$

dass

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z, \qquad \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z$$

ist.

(iii) Schließlich sieht man aus der Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z e^w$, für alle $z, w \in \mathbb{C}$, dass wegen $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 \\ &= \frac{1}{4}\big((e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})\big) = 1 \end{aligned}$$

ist.

Man beachte, dass all diese Formeln nicht nur für reelle $z = x \in \mathbb{R}$ gelten (wo man sie vielleicht schon kennt), sondern sogar für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) [Vorbemerkung: Vielleicht zunächst einige Anmerkungen dazu, warum der Hinweis gilt. Später, wenn die Theorie der holomorphen Funktionen noch etwas weiter entwickelt ist, werden wir sehen, dass Funktionen auf Kreisscheiben, die durch konvergente Potenzreihen gegeben sind wie die Exponentielfunktion, dort auch holomorph sind und man sie summandenweise differenzieren darf. Hier, wo das noch nicht zur Verfügung steht, kann man die Holomorphie der komplexen Exponentialfunktion auch durch die Aufteilung in Real- und Imaginärteil einsehen. Wegen der Eulerschen Gleichung, die man wie oben deren Verallgemeinerung direkt aus den Potenzreihendarstellungen von exp, cos und sin bekommt,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

fur alle $t \in \mathbb{R}$, sieht man dass für $z = x + iy$ gilt:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i(e^x \sin y),$$

wobei wir die Funktionalgleichung für exp benutzt haben (die man tatsächlich z.B. durch das Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen erhalten kann). Aus dieser Darstellung sieht man nun, dass z.B. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, weil

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z, \qquad \frac{\partial e^z}{\partial y} = ie^z$$

ist und damit

$$\frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z.$$

Daran sieht man einerseits, dass exp holomorph und andererseits, dass $\exp' = \exp$ ist. Außerdem sieht man an der Darstellung, dass das Bild von exp ganz $\mathbb{C}^*$ ist (die Null wird nicht getroffen), aber dass exp nicht injektiv ist, sondern, dass

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

ist, was wegen der Funktionalgelichung dazu führt, dass

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi i \cdot k,$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ sein muss. Denn aus

$$e^x \cos(y) = 1, \qquad e^x \sin(y) = 0$$

folgt wegen $\sin(y) = 0$ zunächst, dass $y \in \mathbb{Z}\pi$ ist, aber für die ungeraden Vielfachen $y = (2k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{Z}$) ist $\cos(y) = -1$ und die erste Gleichung ist wegen $e^x > 0$ nicht mehr zu erfüllen. Also muss $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ sein und dann wegen $\cos(y) = 1$ und daraus $e^x = 1$ schließlich auch $x = 0$. Das zeigt

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i \mathbb{Z}.]$$

Daraus könenn wir nun alle Nullstellen des komplexen Cosinus berechnen. Es sind dies nur die schon im Reellen bekannten:

$$0 = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{e^{-iz}}{2}(e^{2iz} + 1).$$

Weil e^{-iz} nie Null ist, führt das auf

$$e^{2iz} = -1 = e^{-i\pi} \Leftrightarrow e^{i(2z+\pi)} = 1.$$

Das geht genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $2z + \pi = 2k\pi$, also wenn $z = \frac{1}{2}(2k-1)\pi$ ist. Das sind genau die Nullstellen des reellen Cosinus. Aus den obigen Darstellungen von Cosinus und Sinus sieht man jetzt unmittelbar, dass cos und sin holomorph sind und es gilt:

$$\begin{aligned}
\cos' z &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) \\
&= \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(-e^{iz} + e^{-iz}) = -\sin z; \\
\sin' z &= \frac{1}{2i}\frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) \\
&= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.
\end{aligned}$$

Auch der komplexe Tangens ist als Quotient zweier holomorpher Funktionen holomorph und nach der Quotientenregel ist

$$\begin{aligned}
\tan' z &= \frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{\cos z}\right) = \frac{\cos^2 z - \sin z(-\sin z)}{\cos^2 z} \\
&= 1 + \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z.
\end{aligned}$$