Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
17.05.2021
Blatt 04

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 12. **(a)** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie dass $u := \mathrm{Re}(f)\colon G \to \mathbb{R}$ und $v := \mathrm{Im}(f)\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch sind. (v heißt dann *konjugiert harmonisch zu* u.)

(b) Sei nun $G \subseteq \mathbb{C}$ sogar sternförmiges Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch, $\triangle u = 0$. Zeigen Sie, dass es ein holomorphes $f\colon G \to \mathbb{C}$ gibt mit $\mathrm{Re}(f) = u$. (Hinweis: Betrachten Sie $g\colon G \to \mathbb{C}$, $g = \partial_x u - i\partial_y u$.)

Lösungsvorschlag. **(a)** Für eine zweimal stetig differenzierbare (komplexwertige) Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) ist wegen des Satzes von Schwarz

$$4\partial^2_{z\bar{z}} f = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)(f) = (\partial^2_{xx} + i\partial^2_{xy} - i\partial^2_{yx} - i^2\partial_{yy})(f) = \triangle f.$$

Daher ist eine holomorphe Funktion f (wegen $\partial_{\bar{z}} f = 0$) dann insbesondere harmonisch, $\triangle f = 0$, und damit für $f = u + iv$ wegen $\triangle f = \triangle u + i\triangle v$ auch ihr Realteil u und ihr Imaginärteil v.

(b) Sei nun G sternförmig und $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch, d.h.: u ist zweimal stetig differenzierbar mit $\triangle u = 0$. Wir setzen dann $g\colon G \to \mathbb{C}$,

$$g = \partial_x u - i\partial_y u$$

und rechnen:

$$2g_{\bar{z}} = \partial_x g + i\partial_y g = \partial^2_{xx} u - i\partial^2_{xy} u + i(\partial^2_{yx} u - i\partial^2_{yy} u) = \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u = \triangle u = 0,$$

wieder mit dem Satz von Schwarz. Es ist also g holomorph und hat daher, weil G sternförmig ist, eine Stammfunktion $h\colon G \to \mathbb{C}$, $h' = g$ (siehe Aufgabe-09-a). Für $w := \mathrm{Re}(h)\colon G \to \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\partial_x(w - u) = \mathrm{Re}(\partial_x h) - \partial_x u = \mathrm{Re}(h') - \partial_x u = \mathrm{Re}(g) - \partial_x u = 0,$$

weil für ein holomorphes h aus $\partial_{\bar{z}} h = 0$ und $\partial_z h = h'$ folgt: $\partial_x h = h'$ und $\partial_y h = ih'$. Damit sieht man auch

$$\begin{aligned}\partial_y(w - u) &= \mathrm{Re}(h_y) - \partial_y u = \mathrm{Re}(ih') - \partial_y u = \mathrm{Re}(ig) - \partial_y u \\ &= \mathrm{Re}(i\partial_x u + \partial_y u) - \partial_y u = \partial_y u - \partial_y u = 0.\end{aligned}$$

Damit ist $D(w-u)=0$, also $w-u$ konstant,

$$w - u = c,$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Setzt man dann $f := h - c$, so ist auch f holomorph und $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(h-c) = w - c = u$.

Aufgabe 13. (a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein (stetiger) Weg. Zeigen Sie, dass es ein stetiges $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\varphi(t)}.$$

(Hinweis: Sei $D_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $D_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Man zerlege $[0,1]$ so in endlich viele Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, \ldots, m$; $t_0 = 0$, $t_m = 1$), dass $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ in D_1 oder in D_2 liegt. Dann benutze man für $\varphi|[t_{j-1}, t_j]$ einen Zweig des Logarithmus $\log_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$ bzw. $\log_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$.)

(b) Seien $\varphi, \psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wie in (a) zwei solche *Lifts*. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\psi(t) = \varphi(t) + 2\pi k.$$

(Hinweis: Eine stetige Funktion $k\colon [0,1] \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ muss konstant sein.)

(c) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ nun ein *geschlossener* Weg. Man definiert *die Umlaufzahl* $n(\gamma) \in \mathbb{Z}$ *(bzgl. 0)* nach Wahl eines Lifts wie unter (a) durch $n(\gamma) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0))$. Begründen Sie, warum $n(\gamma)$ tatsächlich ganzzahlig ist und warum sie wohldefiniert ist (d.h.: nicht von der Wahl des Lifts abhängt.) Zeigen Sie dann für den Fall, dass γ sogar stetig differenzierbar ist:

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Ein topologisches Argument, welches die Kompaktheit von $I = [0,1]$ benutzt, zeigt, dass es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$ von I gibt, so dass für jedes $j = 1, \ldots, m$ $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_1$ oder $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_2$ ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq D_1$ ist und dann abwechselnd $\gamma([t_1, t_2]) \subseteq D_2$, $\gamma([t_2, t_3]) \subseteq D_1$ usw. (Wenn etwa D_1 zweimal auftaucht, fassen wir die beiden Teilintervalle zu einem zusammen. Siehe auch die Anmerkung im Anschluss an den Lösungsvorschlag.) Wir wissen bereits, dass es auf D_1 einen Zweig des Logarithmus $\log_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$ gibt (den Hauptzweig, siehe Aufgabe-10). Da D_2 ebenfalls sternförmig ist (bzgl. -1), gibt es auch auf D_2 einen Zweig $\log_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$ des Logarithmus, z.B.

$$\log_2(z) = i\pi + \int_{\alpha_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wo α_z der geradlinige Weg von -1 nach z sei. Über ihren Imaginärteil induziert jeder Zweig des Logarithmus eine Argumentfunktion $\arg := \operatorname{Im}(\log)\colon G \to \mathbb{R}$, weil für alle $z \in G$ mit

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

gilt:

$$z = |z| e^{i\arg(z)}.$$

Weitere Zweige $\log^{(k)}$ sind dann durch Addition von $2\pi ik$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) gegeben (und nur solche gibt es noch, siehe auch Aufgabe-14),

$$\log^{(k)}(z) = \log(z) + 2\pi ik.$$

Wir setzen nun auf $[t_0, t_1]$, weil $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq D_1$ ist, geht das):

$$\varphi(t) := \mathrm{Im}(\log_1(\gamma(t)).$$

Dann ist wirklich

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)},$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$ und φ ist auch stetig, da γ und $\log_1$ stetig sind. In $t = t_1$ ist nun $\gamma(t) \in D_1 \cap D_2$, weil $\gamma([t_1, t_2]) \subseteq D_2$ ist. Da auch

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{\varphi_2(t)},$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ ist, wenn wir $\varphi_2(t) := \mathrm{Im}(\log_2(\gamma(t)))$ setzen, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1) + 2\pi k.$$

Wir korrigieren daher $\log_2$ umd die Konstante $2\pi ik$, setzen $\tilde{\log}_2 := \log_2 + 2\pi ik$ und definieren damit $\tilde{\varphi}_2 \colon [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}_2(t) := \mathrm{Im}(\tilde{\log}_2(\gamma(t))),$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$. Die Funktionen φ_1 und $\tilde{\varphi}_2$ setzen sich nun, weil sie in t_1 nach Konstruktion übereinstimmen, zu einer stetigen Funktion $\varphi_{12} \colon [t_0, t_2] \to \mathbb{R}$ zusammen, so dass für alle $t \in [t_0, t_2]$ gilt:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi_{12}(t)}.$$

So fahren wir nun fort und nach m Schritten haben wir dann ein stetiges $\varphi = \varphi_{12\cdots m} \colon [t_0, t_m] = [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)},$$

für alle $t \in [0, 1]$.

(b) Seien also $\varphi, \psi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ zwei solche *Argumentfunktionen für* γ, also

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)|e^{i\psi(t)}.$$

Es folgt:

$$e^{i(\varphi(t)-\psi(t))} = \frac{|\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}}{|\gamma(t)|e^{i\psi(t)}} = 1.$$

Also gibt es für jedes $t \in I$ ein $k(t) \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi k(t).$$

Da φ und ψ stetig sind, ist es auch $k \colon [0, 1] \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, denn

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(t) - \psi(t)).$$

Z.B. mit dem Zwischenwertsatz sieht man aber, dass eine stetige Funktion $k \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, die nur ganzzahlige Werte annimmt, konstant sein muss. (Wäre etwa $k(t_1) \neq k(t_2)$ für $t_1 < t_2$, so wählt man eine nicht-ganzzahlige Zahl $c \in [k(t_1), k(t_2)]$ bzw. $[k(t_2), k(t_1)]$, und dann müsste c auch angenommen werden.) Damit gibt es also ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi \cdot k.$$

(c)(i) Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Argumentfunktion für einen geschlossenen Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$, also $\gamma(0) = \gamma(1) =: c$. Da dann

$$c = |c|e^{i\varphi(0)} = |c|e^{i\varphi(1)}$$

ist, muss wieder

$$\varphi(1) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

sein, also

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Sind $\varphi, \psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zwei solche Argumentfunktionen, so gibt es nach (b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi k$, für alle $t \in [0,1]$. Es ist dann

$$\frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) = \frac{1}{2\pi}\left((\psi(1) + 2\pi k) - (\psi(0) + 2\pi k)\right) = \frac{1}{2\pi}(\psi(1) - \psi(0)),$$

also ist $n(\gamma) \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert.

(iii) Sei schließlich γ zudem stetig differenzierbar. Da $\gamma(t) \neq 0$ ist, für alle $t \in [0,1]$, ist dann auch $r\colon [0,1] \to (0,\infty)$, $r(t) = |\gamma(t)|$, stetig differenzierbar. Ist nun $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Argumentfunktion für γ, so ist φ wenigstens stückweise stetig differenzierbar, da sie stückweise über die Logarithmuszweige erklärt wurde. (Wir bräuchten daher für γ nur stückweise Differenzierbarkeit verlangen. Andererseits zeigt eine genauere Analyse der Konstruktion der Argumentfunktion φ, dass sie auch an den Unterteilungspunkten t_j $(j = 1, \ldots, m-1)$ glatt ist, wenn γ es ist, da die beiden Zweige, die bei der Definition um t_j benutzt wurden, um t_j übereinstimmen.) Jetzt können wir rechnen: Aus

$$\gamma = re^{i\varphi}$$

folgt:

$$\dot\gamma = \dot r e^{i\varphi} + ri\dot\varphi e^{i\varphi} = e^{i\varphi}(\dot r + ir\dot\varphi).$$

Damit ist nun

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{\dot\gamma(t)\,dt}{\gamma(t)} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{e^{i\varphi}(\dot r + ir\dot\varphi)}{re^{i\varphi}}\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 (\frac{\dot r}{r} + i\dot\varphi)\,dt = \frac{1}{2\pi i}(\ln(r)|_0^1 + i\varphi|_0^1) \\
&= \frac{1}{2\pi i}(\ln(r(1) - \ln(r(0)) + \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)).
\end{aligned}$$

Wegen $r(1) = r(0)$ folgt also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z} = n(\gamma).$$

[**Anmerkung**: Zu einer wie oben beschriebenen Unterteilung kann man wie folgt kommen: Die beiden offenen Mengen $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}^*$ überdecken $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^* = D_1 \cup D_2$. Deshalb überdecken die

Urbilder $\gamma^{-1}(D_1), \gamma^{-1}(D_2) \subseteq [0,1]$ das Intervall $[0,1]$, da $\mathrm{im}(\gamma) \subseteq \mathbb{C}^*$ ist. Nun sind zwar $\gamma^{-1}(D_1)$ und $\gamma^{-1}(D_2)$ wegen der Stetigkeit von γ offen, aber i.a. nicht zusammenhängend. Man kann aber jeden topologischen Raum X in seine so genannten *Zusammenhangskomponenten* $X_i \subseteq X$ $(i \in I)$ zerlegen, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$. Dabei sind X_i maximale zusammenhängende Teilmengen von X, die offen und zusammenhängend sind. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist ein Intervall. Deshalb gibt es jetzt Familien $(J_i^{(1)})_{i\in I}$ und $(J_j^{(2)})_{j\in J}$ von Intervallen, so dass

$$\gamma^{-1}(D_1) = \bigcup_{i\in I} J_i^{(1)}, \qquad \gamma^{-1}(D_2) = \bigcup_{j\in J} J_j^{(2)}.$$

Alle diese Intervalle zusammen $(J_i^{(1)}, J_j^{(2)})_{i,j}$ sind dann eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $I = [0,1]$. Deshalb gibt es bereits endlich viele $J_0, \ldots, J_m$ unter diesen, die I überdecken, $I = J_0 \cup \cdots \cup J_m$. Unter diesen muss eines sein, welches $0 \in I$ enthält, nennen wir es I_0. Ist $I_0 = [0, s_0)$, so muss es ein zweites geben, nennen wir es I_1, welches s_0 enthält. Dann ist $I_0 \cap I_1 \neq \emptyset$ und wir können unseren ersten Zerteilungspunkt $t_1 \in I_0 \cap I_1$ wählen. Und so fahren wir fort. Dann ist gesichert, dass $[t_{j-1}, t_j] \subseteq I_{j-1}$ ist und damit $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ enthalten in D_1 oder D_2. (Man kann annehmen immer abwechselnd.) Das liefert die gewünschte Zerlegung $(t_0, \ldots, t_m)$ von I.]

Aufgabe 14. Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $\log\colon G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf G. Sei weiter $a \in \mathbb{C}$. Man definiert *den zu* log *gehörenden Zweig der a. Potenz auf G* durch $\mathrm{pot}_a\colon G \to \mathbb{C}$,

$$\mathrm{pot}_a(z) = \exp(a \cdot \log(z)) =: z^a.$$

(a) Berechnen Sie alle möglichen Werte von i^i, 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$. (Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass sich zwei Zweige des Logarithmus nur durch eine konstante Funktion $2\pi i \cdot k$, mit $k \in \mathbb{Z}$, unterscheiden können (vgl. auch Aufgabe-13-b).)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man nennt eine stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ *einen Zweig der n. Wurzel auf G*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $f(z)^n = z$. Zeigen Sie, dass es für einen solchen Zweig eine n. Einheitswurzel $\omega \in \mathbb{C}^*$ (siehe Aufgabe-01) gibt, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z) = \omega \exp(\frac{1}{n}\log(z)).$$

Lösungsvorschlag. **(a)** ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\log\colon G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, so ist $\log_k\colon G \to \mathbb{C}$,

$$\log_k(z) = \log(z) + 2\pi i k,$$

ebenfalls ein Zweig des Logarithmus, denn

$$\exp \circ \log_k(z) = \exp(\log(z) + 2\pi i k) = \exp \circ \log(z) + e^{2\pi i k} = z,$$

wegen der $2\pi i$-Periodizität der Exponentialfunktion. Ist umgekehrt $\tilde{\log}$ irgendein Zweig des Logarithmus auf G, so muss $\tilde{\log} = \log_k$ sein, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Denn für jedes $z \in G$ gibt es dann ein $k(z) \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{\log}(z) = \log(z) + 2\pi i k(z),$$

denn

$$\exp(\tilde{\log}(z) - \log(z)) = \frac{\exp \circ \tilde{\log}(z)}{\exp \circ \log(z)} = \frac{z}{z} = 1.$$

Weil G zusammenhängend ist und $k\colon G \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ wegen

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i}(\tilde{\log}(z) - \log(z))$$

stetig, muss k konstant sein (vgl. Aufgabe-13-b). Hat man also einen Wert von $\log(z)$ so sind die anderen Werte aller Zweige gerade $\log(z) + 2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Bei $z = i$ ist für den Hauptweig $\log\colon D \to \mathbb{C}$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$,

$$\log(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2},$$

also sind die möglichen Werte gerade $i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik$, mit $k \in \mathbb{Z}$. Das sind gerade die Urbilder von i unter $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$,

$$\exp^{-1}(i) = \{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) \in \mathbb{C};\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es folgt:

$$i^i = \exp(i\log(i)) = \exp(i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)) = \exp((-\frac{\pi}{2} - 2\pi k),$$

$k \in \mathbb{Z}$. Für den Hauptzweig ist also:

$$i^i = e^{-\pi/2}.$$

(ii) Weiter ist

$$\log(2) = \ln(2) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z},$$

also

$$2^{-i} = \exp(-i\log(2)) = \exp(-i\ln(2) + 2\pi k),$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Für den Hauptweig ist also

$$2^{-i} = e^{-i\ln(2)}.$$

(iii) Für den Zweig $\log\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$,

$$\log(z) = i\pi + \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wo γ_z der geradlinige Weg von -1 nach z ist, ist $\log(-1) = i\pi$. Für die anderen Zweige ist dann also

$$\log(-1) = i\pi + 2\pi ik = i\pi(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt zunächst für $\sqrt{i} = i^{1/2}$ nach der Defiition der allgemeinen Potenz

$$\sqrt{i} = \exp(\frac{1}{2}\log(i)) = \exp(\frac{1}{2}(i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik)) = \exp(i\frac{\pi}{4} + i\pi k) = \pm e^{i\pi/4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(je nachdem ob k gerade oder ungerade ist), für den Hauptzweig: $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, und daraus dann

$$(-1)^{\sqrt{i}} = \exp(\sqrt{i}\log(-1)) = \exp(\pm e^{i\pi/4} \cdot i(2k+1)\pi) = \exp(i\pi e^{i\pi/4}(2k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für die beiden Hauptzweige ist dann:

$$(-1)^{\sqrt{i}} = \exp(i\pi e^{i\pi/4}).$$

(b) Für $f_1 \colon G \to \mathbb{C}$,

$$f_1(z) = z^{1/n} = \exp(\frac{1}{n}\log(z)),$$

folgt offenbar, dass f_1 ein Zweig der n. Wurzel auf G ist, denn

$$f_1(z)^n = \left(\exp(\frac{1}{n}\log(z)\right)^n = \exp(n \cdot (\frac{1}{n}\log(z) = \exp \circ \log(z) = z,$$

denn $\log \colon G \to \mathbb{C}$ ist ja nach Voraussetzung ein Zweig des Logarithmus. Da $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ist, ist insbesondere $f_1(z) \neq 0$, für alle $z \in G$. (Wenn log der Hauptweig ist, nennen wir f_1 den *Hauptzweig der n. Wurzel*.) Ist nun $f \colon G \to \mathbb{C}$ ein beliebiger Zweig der n. Wurzel auf G, so betrachten wir die dann auch stetige Funktion $h \colon G \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \frac{f(z)}{f_1(z)}.$$

Dann ist

$$h(z)^n = \frac{f(z)^n}{f_1(z)^n} = \frac{z}{z} = 1,$$

also gibt es für jedes $z \in G$ eine n. Einheitswurzel $\omega(z) \in U_n \subseteq \mathbb{C}^*$ (wo U_n die Gruppe der n. Einheitswurzeln sind, vgl. Aufagbe-01) mit $h(z) = \omega(z)$. Da aber $U_n \subseteq \mathbb{C}^*$ endlich ist, muss jede stetige Funktion $h \colon G \to U_n \subseteq \mathbb{C}$ wieder konstant sein. Es gibt also ein $\omega \in U_n$ mit

$$f(z) = \omega f_1(z) = \omega \exp(\frac{1}{n}\log(z)).$$