Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
24.05.2021
Blatt 05

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 15. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht-konstant. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (Erinnerung: $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *dicht*,, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \neq \emptyset$ gilt: $D \cap U \neq \emptyset$. Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Liouville.)

Lösungsvorschlag. Angenommen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ sei nicht dicht. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$, so dass $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \emptyset$ ist, also $|f(z) - a| \geq r$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a},$$

dass g holomorph ist, $g(z) \neq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$ und mit $M := 1/r$ gilt:

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{r} = M.$$

Nach dem Satz von Liouville muss g deshalb konstant sein. Ist $g(z) = c \neq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist dann

$$f(z) = \frac{1}{c} + a, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

also auch konstant. Ist also f nicht-konstant, so muss demnach $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ dicht liegen.

Aufgabe 16. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es existiere $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$, $M > 0$ so, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt:

$$|f(z)| \leq M|z|^n.$$

Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion vom Grad kleiner oder gleich n ist. (Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Ungleichungen, dass $f^{(n+1)} = 0$ ist.)

Lösungsvorschlag. (i) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und $r > R + |z|$. Dann ist für jedes $\zeta \in \partial B_r(z)$:

$$|\zeta| \geq |\zeta - z| - |z| = r - |z| > R$$

und

$$|\zeta| \leq |\zeta - z| + |z| = r + |z| < r + (r - R) < 2r.$$

Daraus folgt

$$|f(\zeta)| \leq M|\zeta|^n \leq M(2r)^n = 2^n M r^n.$$

Nach den Cauchy-Abschätzungen folgt daher, dass

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \sup\{|f(\zeta))| : \zeta \in \partial B_r(z)\} \leq \frac{(n+1)!2^n M r^n}{r^{n+1}} \\ &= (n+1)!2^n M \frac{1}{r} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

für $r \to \infty$. Da wir $r > R + |z|$ beliebig groß wählen können, folgt:

$$f^{(n+1)}(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Behauptung. f ist ein Polynom mit $\deg(f) \leq n$.

Induktion nach n: $n = 0$: $f' = 0$, also $f = \text{const.}$ und damit ist f polynomial mit $\deg(f) = 0$.
$n \to n+1$: Dann ist

$$(f')^{(n+1)} = f^{(n+2)} = 0,$$

und damit ist f' nach Induktionsvoraussetzung ein Polynom mit $\deg(f') \leq n$, also

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ $(k = 0, \ldots, n)$. Dann ist neben f auch $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} z^j$$

Stammfunktion von f'. Es existiert also ein $b_0 \in \mathbb{C}$ mit $f - F = b_0$. Mit $b_k := a_{k-1}/k$, für $k = 1, \ldots, n+1$, folgt dann tatsächlich

$$f(z) = b_0 + F(z) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k z^k,$$

also ist f ein Polynom mit $\deg(f) \leq n+1$.

Für eine formale (komplexe) Potenzreihe $P = \sum_0^\infty a_n X^n$ definiert man ihre *formale Ableitung* durch

$$P' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

Aufgabe 17. Sei P eine formale Potenzreihe und $R_P \in [0, \infty]$ ihr Konvergenzradius. Zeigen Sie: $R_{P'} = R_P$.

Lösungsvorschlag. (i) $R_{p'} \geq R_P$: Das hatte wir bereits in der Vorlesung bemerkt. Die konvergente Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[[X]]$ gibt Anlass zu der holomorphen Funktion $f = f_P\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = P(z)$ und $R = R_P$. Dabei konvergieren die Partialsummen $f_n\colon B_R(0) \to \mathbb{C}$,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

kompakt gegen f. Daraus folgt, dass

$$f'(z) = \lim f_n'(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}z^k$$

ist. Das zeigt, dass der Konvergenzradius von P' mindestens so groß ist wie R, denn $(\sum_0^{n-1}(k+1)a_{k+1}z^k)$ sind die Partialsummen von $P'(z)$.

(ii) $R_{P'} \leq R_P$: Wir betrachten jetzt die holomorphe Funktion $g\colon B_{R'}(0) \to \mathbb{C}$, die durch P' gegeben ist, $g(z) = P'(z)$ (bei $R' := R_{P'}$). Die Partialsummen $g_n\colon B_{R'}(0) \to \mathbb{C}$,

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}z^k,$$

konvergieren kompakt gegen g. Sei nun $z \in B_{R'}(0)$ beliebig aber fest. Dann integrieren wir g entlang der geradlinigen Verbindung von 0 nach z, $\gamma_z\colon [0,1] \to B_{R'}(0)$, $\gamma_z(t) = tz$. Weil $C := \gamma[0,1]) \subseteq B_{R'}(0)$ kompakt ist, konvergiert $(g_n|C)$ gleichmäßig gegen $g|C$ und damit auch $((g_n \circ \gamma_z)\dot{\gamma}_z)$ gleichmäßig gegen $(g \circ \gamma_z)\dot{\gamma}_z$ auf $[0,1]$. Deshalb darf man nach Weierstraß Integral und Funktionenlimes vertauschen und erhält

$$\int_{\gamma_z} g(\zeta)\, d\zeta = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_z} g_n(\zeta)\, d\zeta.$$

Es ist aber $\dot{\gamma}_z(t) = z$, für alle $t \in [0,1]$, also

$$g_n \circ \gamma_z(t) \cdot \dot{\gamma}_z(t) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}(tz)^k \cdot z = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}z^{k+1}t^k.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} g_n(\zeta)\, d\zeta &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}z^{k+1}t^k\, dt = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}z^{k+1}\frac{1}{k+1}t^{k+1}|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}z^{k+1}. \end{aligned}$$

Da $z \in B_{R'}(0)$ beliebig war, erhalten wir, dass

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1} = a_0 + \int_{\gamma_z} g(\zeta)\, d\zeta$$

ist, also für alle $z \in B_{R'}(0)$ konvergiert, und damit muss $R_P \geq R'$ sein.

Wir nennen eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) einen *Zweig des Arcustangens*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $\tan \circ f(z) = z$.

Aufgabe 18. **(a)** Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\colon \exists t \in \mathbb{R}\colon |t| \geq 1 \text{ und } z = it\}$ und $\operatorname{Arctan}\colon D \to \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Arctan}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

wo γ_z der geradlinige Weg von 0 nach z ist. Zeigen Sie, dass Arctan ein Zweig des Arcustangens ist. (Wir nennen ihn den *Hauptzweig*.)

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ wie unter (a), $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $\mathrm{Log}\colon G \to \mathbb{C}$ der Hauptweig des Logarithmus. Zeigen Sie zunächst, dass $g\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, das Gebiet D nach G abbildet und dann für alle $z \in D$:

$$\mathrm{Arctan}(z) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(\frac{1+iz}{1-iz}).$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Hier habe ich, glaube ich, beim Stellen der Aufgabe einen Denkfehler gemacht, in dem ich glaubte, ich könnte mit der Kettenregel direkt zeigen, dass

$$\frac{d}{dz}\tan\circ\mathrm{Arctan}(z) = 1$$

ist, was auch stimmt, aber nicht so einfach zu ermitteln ist. Wenn man zuerst Teil (b) macht und dann zeigt, dass die dortige Funktion $z \mapsto \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(\frac{1+iz}{1-iz})$ ein Zweig des Arcustangens ist, folgt es mit Teil (b) dann auch für den so von uns definierten Arcustangens. Wir machen daher zunächst Teil (b). Sorry.

(b) Die holomorphe Funktion $g\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, bildet das Gebiet D tatsächlich nach $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ab (sogar *biholomorph*, d.h.: $g|D\colon D \to G$ ist bijektiv und ihre Umkehrung auch holomorph), denn ist $g(z) \notin G$ so gibt es also ein $\lambda \geq 0$ mit

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -\lambda,$$

also

$$1 + iz = -\lambda(1 - iz),$$

woraus nach wenigen Umformungen $\lambda \neq 1$ und

$$z = -i\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

folgt. Für $\lambda > 1$ ist aber

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = 1 + \frac{2}{\lambda-1} > 1,$$

und für $0 \leq \lambda < 1$ ist

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = -1 + \frac{2\lambda}{\lambda-1} \leq -1,$$

also $z \notin D$. Es gilt also: $z \in D \Rightarrow g(z) \in G$.

Nun differenzieren wir zunächst g:

$$g'(z) = \frac{i(1-iz) - (1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} = \frac{(i+z) - (-i+z)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2},$$

und dann mit der Kettenregel wegen $\mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{w}$, für alle $w \in G$:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1-iz}{1+iz} \cdot \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1-(iz)^2} = \frac{1}{1+z^2},$$

ebenso wie $\text{Arctan}'(z) = 1/(1+z^2$. Bei $z = 0$ stimmen beide Funktionen überein und damit auf ganz D,

$$\text{Arctan}(z) = \frac{1}{2i}\text{Log}\frac{1+iz}{1-iz}.$$

(a) Wir prüfen, ob die Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i}\text{Log}(\frac{1+iz}{1-iz}),$$

ein Zweig des Arcustangens ist. Dazu formen wir den Term für den Tangens zunächst so um:

$$\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = (-i)\frac{(e^{2iz} - 1)e^{-iz}}{(e^{2iz} + 1)e^{-iz}} = i\frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}.$$

Es ist nun

$$e^{2if(z)} = \exp \circ \text{Log}(\frac{1+iz}{1-iz}) = \frac{1+iz}{1-iz},$$

weil Log ein Zweig des Logarithmus ist und damit

$$\tan \circ f(z) = i\frac{1 - \frac{1+iz}{1-iz}}{1 + \frac{1+iz}{1-iz}} = i\frac{(1-iz) - (1+iz)}{(1-iz) + (1+iz)} = i\frac{-2iz}{2} = z,$$

für alle $z \in D$. Damit ist f ein Zweig des Arcustangens und wegen $f = \text{Arctan}$ nach Teil (b) auch Arctan.