Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
07.06.2021
Blatt 06

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Ein topologischer Raum X heißt

- *zusammenhängend*, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein;
- *wegzusammenhängend*, wenn gilt: Für alle $x_0, x_1 \in X$ gibt es einen Weg $\alpha \colon I \to X$ (d.h.: α ist stetig, wo $I = [0,1]$ das Einheitsintervall mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist) mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$.

Aufgabe 19. (a) Sei X ein zusammenhängender Raum. Zeigen Sie: Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und offen, so ist $A = X$.

(b) Zeigen Sie: $I = [0,1]$ ist zusammenhängend. (Hinweis: Ist $I = U \dot\cup V$ und o.E. $0 \in U$, so betrachte

$$b := \sup\{x \in I : \; [0,x] \subseteq U\}.)$$

(c) Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

Lösungsvorschlag. (a) Es ist $X = A \dot\cup A^c$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene Mengen, denn da A auch abgeschlossen ist, ist A^c auch offen. Deshalb muss eine von beiden Teilmengen leer sein. A ist es aber nach Voraussetzung nicht, also ist $A^c = \emptyset$, d.i.: $A = X$.

(b) Ist $I = U \dot\cup V$ eine disjunkte Zerlegung in (relativ-) offene Teilmengen $U, V \subseteq I$, so sei o.E. $0 \in U$. Wir setzen dann

$$b := \sup M, \quad \text{mit} \quad M = \{x \in I : \; [0,x] \subseteq U\}.$$

Dann ist zunächst $b \in I$, da $M \neq \emptyset$ ist, weil $0 \in M$ ist. Weiterhin ist $b \in U$, weil U abgeschlossen ist (da $U^c = V$ offen ist). Es gibt nämlich aus der Definition des Supremumus heraus eine (monoton wachsende) Folge (x_n) in M mit $(x_n) \to b$. Da $M \subseteq U$ ist, ist also $x_n \in U$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher muss b auch in U sein (und sogar in M). Wäre nun $b < 1$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $b + t\varepsilon \in U$ wäre, für alle $t \in [0,1]$, denn U ist auch offen. Aber dann wäre $b + \varepsilon \in M$: Das ist ein Widerspruch zur Definition von b. Es ist also $b = 1$ und damit $[0,1] \subseteq U$, also $V = \emptyset$. Das zeigt, dass I zusammenhängend ist.

(c) Sei $X = U \dot\cup V$ und angenommen: $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Dann gibt es also Elemente $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, finden wir einen Weg $\alpha\colon [0,1] \to X$, der x und y verbindet, $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Weil α stetig ist, sind $\alpha^{-1}(U)$ und $\alpha^{-1}(V)$ offen in I und wegen $X = U \dot\cup V$ ist auch $I = \alpha^{-1}(U) \dot\cup \alpha^{-1}(V)$. Aber beide sind nicht-leer, denn $0 \in \alpha^{-1}(U)$ und $1 \in \alpha^{-1}(V)$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass I zusammenhängend ist.

Aufgabe 20. Beweisen Sie folgende Variante des Identitätssatzes: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $a \in G$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{(n)}(a) = 0$. Dann ist f konstant. (Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $A := \{z \in G\colon f^{(n)}(z) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen Sie, dass diese nicht-leer, abgeschlossen und offen ist.)

Lösungsvorschlag. Wir betrachten also

$$A = \{z \in G : \ f^{(n)}(z) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq G.$$

Da $f^{(n)}\colon G \to \mathbb{C}$ stetig ist, ist $(f^{(n)})^{-1}(0) \subseteq G$ abgeschlossen und damit auch

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})^{-1}(0).$$

Da f holomorph und damit komplex-analytisch ist, ist A aber auch offen. Ist nämlich $z_0 \in A$, so gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq G$, so dass die Taylorreihe T_{f,z_0} von f in z_0 für alle $z \in B_r(z_0)$ gegen $f(z)$ konvergiert,

$$f(z) = T_{f,z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Da $f^{(n)}(z_0) = 0$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist aber $T_{f,z_0}(z) = f(z_0)$, für alle $z \in B_r(z_0)$, also $f|B_r(z_0) =$ const. Es folgt, dass auch

$$f^{(n)}(z) = 0$$

ist, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in B_r(z_0)$. Das zeigt: $B_r(z_0) \subseteq A$. Also ist A auch offen. Nach Voraussetzung ist $a \in A$, also $A \neq \emptyset$. Nach Aufgabe-19-a muss deshalb $A = G$ sein, also insbesondere $f'(z) = 0$, für alle $z \in G$. Deshalb ist $f =$ const.

Aufgabe 21. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F\colon [a,b] \times G \to \mathbb{C}$, $(t,z) \mapsto F(t,z)$, stetig. Zudem sei $F_t\colon G \to \mathbb{C}$, $F_t(z) := F(t,z)$, für jedes $t \in [a,b]$ reell-differenzierbar, und $D_2F\colon [a,b] \times G \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $D_2F(t,z) = DF_t(z)$, sei stetig. Zeigen Sie, dass dann $H\colon G \to \mathbb{C}$,

$$H(z) = \int_a^b F(t,z)\,dt,$$

wohldefiniert und reell-differenzierbar ist mit

$$DH(z) = \int_a^b DF_t(z)\,dt, \qquad \forall z \in G.$$

Lösungsvorschlag. Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \subseteq G$ ist. Wir setzen $\varphi\colon B_r(0) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(h) = H(z_0 + h) - H(z_0) - \left(\int_a^b D_2F(t,z)\,dt\right) \cdot h$$

und müssen demnach zeigen:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

(Man beachte, dass das Integral definiert ist, da D_2F für festes (aber beliebiges) $z \in G$ insbesondere stetig ist.) Für den geradlinigen Weg von z_0 zu $z_0 + h$, $\gamma\colon [0,1] \to G$, $\gamma(s) = z_0 + sh$, gilt $\gamma'(s) = h$ und daher

$$\begin{aligned} F_t(z_0 + h) - F_t(z_0) &= F_t \circ \gamma(1) - F_t \circ \gamma(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds}(F_t \circ \gamma)(s)\,ds = \int_0^1 DF_t(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \\ &= \int_0^1 DF_t(\gamma(s)) \cdot h\,ds, \end{aligned}$$

da $F_t \circ \gamma$ stetig differenzierbar ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da D_2F nach Voraussetzung stetig ist, ist es auf Kompakta wie z.B. $K = [0,1] \times \overline{B_\delta(z_0)}$ sogar gleichmäßig stetig. Wir finden deshalb ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in [0,1]$ und alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt:

$$\|DF_t(z) - DF_t(z_0)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

(Wir benutzen hier die Operatornorm $\|\cdot\|$ zur euklidischen Norm auf $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, R^2)$.) Nun können wir $\varphi(h)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\varphi(h)\| &= \left\| \left(\int_a^b (F_t(z_0+h) - F_t(z_0))\,dt - \left(\int_a^b DF_t(z_0)\,dt\right) \cdot h\right) \right\| \\ &= \left\| \int_a^b (F_t(z_0+h) - F_t(z_0) - DF_t(z_0)h)\,dt \right\| \\ &= \left\| \int_a^b \left(\int_0^1 DF_t(\gamma(s))h\,ds - \int_0^1 DF_t(z_0)\,ds \cdot h\right) dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \left(\int_0^1 \|(DF_t(\gamma(s)) - DF_t(z_0)) \cdot h\|\,ds\right) dt \\ &\leq \int_a^b \int_0^1 \|DF_t(\gamma(s)) - DF_t(z_0)\| \cdot \|h\|\,dsdt. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \leq \int_a^b \int_0^1 \frac{\varepsilon}{b-a}\,dsdt = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Es ist also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$$

und damit H differenzierbar mit

$$DH(z) = \int_a^b D_2F(t,z)\,dt.$$

Aufgabe 22. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich-oft differenzierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann reell-analytisch, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subseteq G$ und einer komplex-analytischen Funktion $\hat{f}: G \to \mathbb{C}$ gibt mit $\hat{f}|I = f$.

Lösungsvorschlag. „$\Leftarrow$“: Sei also $\hat{f}: G \to \mathbb{C}$ holomorph, $I \subseteq G$ und $f = \hat{f}|I$ (sowie $f(I) \subseteq \mathbb{R}$). Für jedes $x_0 \in I$ gibt es dann ein $r_{x_0} > 0$, so dass $I_{x_0} := (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}) \subseteq I$ und $B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$ ist und die Taylorreihe $T_{\hat{f},x_0}$ von $\hat{f}$ in x_0 für alle $z \in B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$ gegen $\hat{f}(z)$ konvergiert,

$$\hat{f}(z) = T_{\hat{f},x_0}(z).$$

Die Taylorreihe $T_{f,x_0} \in \mathbb{R}[[X]]$ von f in x_0 ist aber die gleiche wie die von $\hat{f}$ in x_0, denn

$$f'(x_0) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}(x_0) = \hat{f}'(x_0),$$

und genauso für die höheren Ableitungen in x_0. Es ist also

$$f(x) = \hat{f}(x) = T_{\hat{f},x_0}(x) = T_{f,x_0}(x), \qquad \forall x \in B_{r_{x_0}}(x_0) \cap I = I_{x_0}.$$

Also ist f reell-analytisch.

„$\Rightarrow$“: Ist $f: I \to \mathbb{R}$ reell-analytisch, so gibt es für jedes $x_0 \in I$ ein $r_{x_0} > 0$, so dass $I_{x_0} := (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}) \subseteq I$ ist und die Taylorrreihe $T_{f,x_0} \in \mathbb{R}[[X]]$ von f in x_0 für alle $x \in I_{x_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert,

$$f(x) = T_{f,x_0}(x).$$

Der Konvergenzradius von T_{f,x_0} ist also größer als Null und wir können $f|I_{x_0}$ holomorph auf $B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq \mathbb{C}$ durch $f_{x_0}: B_{r_{x_0}}(x_0) \to \mathbb{C}$,

$$f_{x_0}(z) = T_{f,x_0}(z),$$

fortsetzen, d.i.: $f_{x_0}|I_{x_0} = f|I_{x_0}$. Wir setzen nun

$$G := \bigcup_{x_0 \in I} B_{r_{x_0}}(x_0).$$

Dann ist offenbar $I \subseteq G$, denn für jedes $x_0 \in I$ ist $x_0 \in B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$, und G ist als Vereinigung von offenen Mengen offen. G ist auch wegzusammenhängend, denn sind $z_1, z_2 \in G$ beliebig, so gibt es $x_1, x_2 \in I$ mit $z_1 \in B_{r_{x_1}}(x_1)$ und $z_2 \in B_{r_{x_2}}(x_2)$. Dann verbinde man z_1 zunächst geradlinig zu $x_1 \in I$, diesen dann innerhalb von I (geradlinig) mit x_2, und diesen wiederum geradlinig mit z_2. Dieser Weg verläuft dann ganz in G. G ist also ein Gebiet. Auf G setzen wir nun $\hat{f}: G \to \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(z) := f_{x_0}(z), \qquad \text{falls } z \in B_{r_{x_0}}(x_0) \text{ ist.}$$

Dann wollen wir zunächst prüfen, dass dies wohldefiniert ist. Seien dazu $x_1, x_2 \in I$, so dass mit $B_j := B_{r_{x_j}}(x_j)$ $(j = 1, 2)$ gilt: $z \in B_1 \cap B_2$. Mit $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ist dann auch $J := I_{x_1} \cap I_{x_2} \subseteq I$ nicht leer und damit ein offenes Intervall. Nun gilt mit $f_1 := f_{x_1}$ und $f_2 := f_{x_2}$:

$$f_1|J = f|J = f_2|J.$$

Da $B_1 \cap B_2$ zusammenhängend ist, muss nach dem Identitätssatz

$$f_1|(B_1 \cap B_2) = f_2|(B_1 \cap B_2)$$

sein, denn J enthält sicher einen Punkt p und eine Folge (x_n) mit $x_n \in J \setminus \{p\}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, die gegen p konvergiert. Insbesondere ist damit

$$f_1(z) = f_2(z)$$

und damit $\hat{f}(z)$ wohldefiniert. Weil $\hat{f}$ lokal immer mit einem f_{x_0} übereinstimmt und letztere holomorph sind, ist $\hat{f}$ auch holomorph. Nach Konstruktion ist schließlich $\hat{f}|I = f$.