Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
14.06.2021
Blatt 07

# Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

**Aufgabe 23. (a)** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in G$ die einzige Nullstelle von $g$. Weiter sei $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $h\colon G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = f(z)/g(z)$, gilt

$$\operatorname{Res}_a(h) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

**(b)** Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von $f$ und $g$ und dort ihre Residuen:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

**Lösungsvorschlag. (a)** Weil $g\colon G \to \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle in $a \in G$ hat, gibt es ein holomorphes $v\colon G \to \mathbb{C}$ mit $v(a) \neq 0$ und $g(z) = (z-a)v(z)$. Nach der Produktregel ist dann

$$g'(a) = v(a) + (z-a)|_{z=a} v'(a) = v(a).$$

Da $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph ist, gibt es ein holomorphes $u\colon G \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z-a)u(z).$$

Man entwickle $f$ dazu etwa in eine Potenzreihe um $a$ und setze dann bei $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-a)^n$ um $a$: $u(z) := \sum_{n=1}^\infty a_n(z-a)^{n-1}$. Dann ist

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a) + (z-a)u(z)}{(z-a)v(z)} = \frac{f(a)/v(z)}{z-a} + \frac{u(z)}{v(z)}.$$

Schließlich ist $1/v(z)$ wegen $v(a) \neq 0$ lokal um $z = a$ holomorph, also in eine Potenzreihe entwickelbar,

$$\frac{1}{v(z)} = \sum_{k=0}^\infty b_k(z-a)^k = b_0 + \sum_{k=1}^\infty b_k(z-a)^k,$$

wobei $b_0 = 1/v(a) = 1/g'(a)$ ist. Das ergibt

$$\begin{aligned} h(z) &= \left( f(a)(\frac{1}{v(a)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-a)^k) \right) \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{u}{v}(z) \\ &= \frac{f(a)/g'(a)}{z-a} + \left\{ (f(a) \sum_{1}^{\infty} b_k(z-a)^{k-1}) + \frac{u}{v}(z) \right\}, \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck in den geschweiften Klammern holomorph ist. Das zeigt, dass $h$ in $a$ einen einfachen Pol mit Residuum

$$\mathrm{Res}_a(h) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

hat (falls $f(a) \neq 0$ ist; im Falle $f(a) = 0$ ist die Singularität hebbar).

**(b) (i)** Die isolierten Singularitäten von $f\colon z \mapsto 1/(z(z-\pi)^2)$ liegen offenbar bei $a = 0$ und $b = \pi$. Um $a = 0$ ist $u$ mit $u(z) = 1/(z-\pi)^2$ holomorph mit $u(0) = 1/(-\pi)^2 = 1/\pi^2$. Also ist um $z = 0$

$$\frac{1}{(z-\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

mit $b_k \in \mathbb{C}$. Es folgt:

$$\frac{1}{z(z-\pi)^2} = \frac{1/\pi^2}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-1}$$

um $z$. Also hat $f$ in $a$ einen einfachen Pol mit Residuum $1/\pi^2$. Bei $b = \pi$ ist $z \mapsto 1/z$ um $b$ herum holomorph mit Taylordarstellung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{b} + \frac{d}{dz}|_{z=b}(\frac{1}{z}) \cdot (z-\pi) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z-\pi)^k$$

(mit $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \geq 2$). Wegen $\frac{d}{dz}(\frac{1}{z})|_{z=\pi} = -\frac{1}{\pi^2}$ ist daher

$$\frac{1}{z(z-\pi)^2} = \frac{1/\pi}{(z-\pi)^2} + \frac{-1/\pi^2}{z-\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z-\pi)^{k-2}.$$

Es hat also $f$ einen Pol der Ordnung 2 in $b$ und dort das Residuum

$$\mathrm{Res}_\pi(f) = -\frac{1}{\pi^2}.$$

**(ii)** Die isolierten Singularitäten von $g\colon z \mapsto 1/(z(e^z - 1))$ liegen bei $a = 0$ und $b_k = 2\pi ik$ ($k \in \mathbb{Z}$), denn $e^z - 1 = 0$, genau wenn $z = 2\pi ik$ ist, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wir versuchen mal mit $f(z) = 1/z$ und $h(z) = e^z - 1$ Teil (a) der Aufgabe anzuwenden. Dann ist zunächst $b_k = 2\pi ik$ (für $k \neq 0$) einfache Nullstelle von $h$, denn

$$h'(b_k) = e^{b_k} = 1 \neq 0.$$

Es folgt:

$$\mathrm{Res}_{b_k}(g) = \frac{f(b_k)}{h'(b_k)} = \frac{1/b_k}{1} = \frac{1}{2\pi ik},$$

für $k \neq 0$. In $a = b_0$ hat der Nenner von $g$ eine zweifache Nullstelle, denn

$$\begin{aligned} z(e^z - 1) &= z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^{k+2} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k = z^2 \cdot u(z), \end{aligned}$$

wenn wir

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

setzen, also insbesondere $u(0) = 1$ und $u'(0) = 1/2! = 1/2$. Nun entwickeln wir wieder $1/u$ bis zur Ordnung 1,

$$\frac{1}{u(z)} = \frac{1}{u(0)} + \frac{d}{dz}|_{z=0}(\frac{1}{u(z)}) \cdot z + \cdots = 1 + (-\frac{u'(0)}{u(0)^2}) \cdot z + \cdots = 1 - \frac{1}{2} z + \cdots,$$

und das liefert

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \text{hol.}$$

Das Residuum von $g$ in 0 ist also

$$\mathrm{Res}_0(g) = -\frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 24.** Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1 + x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{(für } a > 1\text{)}.$$

(Hinweis für das zweite Integral: Versuchen Sie dieses Integral als ein komplexes Wegeintegral über die Einheitskreislinie zu beschreiben.)

**Lösungsvorschlag. (i)** Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,dx/(1+x^4)$ kann man ähnlich wie in der Vorlesung behandeln. Man ergänzt den Weg $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ (für $r > 1$) um den Halbkreisbogen $\gamma_r\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ und erhält dann den Rand des Kompaktums mit stückweise glattem Rand

$$K_r = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq r,\ \mathrm{Im} z \geq 0\}.$$

Entlang des Weges $\gamma_r$ kann man den Integrand $z^2/(1 + z^4)$ so abschätzen:

$$|\frac{z^2}{1 + z^4}| = \frac{|z|^2}{|1 + z^4|} \leq \frac{r^2}{r^4 - 1},$$

denn

$$r^4 = |z^4| = |z^4 + 1 - 1| \leq |z^4 + 1| + 1,$$

also

$$|z^4 + 1| \geq r^4 - 1.$$

Die Länge von $\gamma_r$ ist $\pi r$, so dass mit der Fundamentalabschätzung

$$|\int_{\gamma_r} \frac{z^2\,dz}{1+z^4}| \leq \sup_{z\in \mathrm{Sp}(\gamma_r)} |\frac{z^2}{1+z^4}| \cdot L[\gamma_r] \leq \frac{\pi r^3}{r^4-1},$$

so dass der Beitrag für $r \to \infty$ also verschwindet. Es ist deshalb

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \lim_{r\to\infty} \int_{\partial K_r} \frac{z^2\,dz}{1+z^4}.$$

Um den Residuensatz anzuwenden, kümmern wir uns nun um die isolierten Singularitäten von $z \mapsto z^2/(1+z^4)$. Das sind die Nullstellen des Nenners, also die Lösungen von

$$z^4 = -1.$$

Bezeichnen wir mit $\omega := \exp(\pi i/4)$ die 8. Einheitswurzel, so sind die Lösungen offenbar gerade $\omega$, $\omega^3$, $\omega^5$ und $\omega^7$, denn

$$(\omega^{2k+1})^4 = \omega^{8k+4} = (\omega^8)^k \cdot \omega^4 = 1^k \cdot (-1) = -1$$

(für alle $k \in \mathbb{Z}$). Der Nenner zerfällt also in die Linearfaktoren

$$1 + z^4 = (z-\omega)(z-\omega^3)(z-\omega^5)(z-\omega^7).$$

Von diesen vier Wurzeln der Gleichung $1+z^4 = 0$ haben nur $\omega$ und $\omega^3$ positiven Imaginärteil und fallen damit in $K_r$ (für $r$ groß genug, hier $r > 1$). Für $r > 1$ ist das Integral unabhängig von $r$, so dass man auch zum Lines für $r \to \infty$ übergehen kann. Wir erhalten dann also mit dem Residuensatz

$$I = 2\pi i(\mathrm{Res}_\omega(f) + \mathrm{Res}_{\omega^3}(f)),$$

wenn wir $f(z) = z^2/(1+z^4)$ setzen. Nun ist offenbar, dass $f$ in $\omega$ und $\omega^3$ nur einfache Pole hat mit

$$\mathrm{Res}_\omega(f) = \frac{\omega^2}{(\omega-\omega^3)(\omega-\omega^5)(\omega-\omega^7)}$$

und

$$\mathrm{Res}_{\omega^3}(f) = \frac{\omega^6}{(\omega^3-\omega)(\omega^3-\omega^5)(\omega^3-\omega^7)}.$$

Da

$$\omega = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i(\frac{1}{2}\sqrt{2})$$

ist, ist

$$\begin{aligned}
\omega^3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i(\frac{1}{2}\sqrt{2}),\\
\omega^5 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\omega.\\
\omega^7 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - i(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -\omega^3,
\end{aligned}$$

und damit

$$\omega - \omega^3 = \sqrt{2}, \quad \omega - \omega^5 = 2\omega, \quad \omega - \omega^7 = i\sqrt{2}$$

sowie

$$\omega^3 - \omega^5 = i\sqrt{2}, \quad \omega^3 - \omega^7 = 2\omega^3.$$

Das ergibt mit $\omega^2 = i$ und $\omega^6 = -i$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_\omega(f) &= \frac{i}{(\sqrt{2})(2\omega)(i\sqrt{2})} = \frac{1}{4\omega}, \\
\operatorname{Res}_{\omega^3}(f) &= \frac{-i}{(-\sqrt{2})(i\sqrt{2})(2\omega^3)} = \frac{1}{4\omega^3}.
\end{aligned}$$

Wegen $1/\omega = \omega^7$ wird also

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_\omega(f) + \operatorname{Res}_{\omega^3}(f) &= \frac{1}{4\omega} + \frac{1}{4\omega^3} = \frac{1}{4\omega}(1 + \frac{1}{\omega^2}) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2})(1-i) \\
&= \frac{1}{8}((\sqrt{2} - \sqrt{2}) + i(-\sqrt{2} - \sqrt{2})) = \frac{-2\sqrt{2}\cdot i}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i.
\end{aligned}$$

Das liefert also schließlich

$$I = 2\pi i(-\frac{\sqrt{2}}{4}i) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

**(ii)** Um das Integral als ein Integral über das Intervall $[0, 2\pi]$ zu beschreiben, bemerken wir zunächst die Symmetrie des Cosinusgraphen bzgl. der vertikalen Geraden $\{x = 0\}$ und $\{x = \pi\}$, d.i.:

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \cos(\pi - x) = \cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daraus sieht man mit den Substitutionen $x = \pi - u$ bzw. $u = -v$, dass

$$\begin{aligned}
\int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} &= \int_0^{-\pi} \frac{-du}{a + \cos(\pi - u)} = \int_0^{-\pi} \frac{-du}{a + \cos(u)} = \int_0^{\pi} \frac{dv}{a + \cos(-v)} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dv}{a + \cos v}.
\end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}.$$

Nun versuchen wir dieses Integral als ein komplexes Wegintegral über die Einheitskreilinie $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, zu schreiben und rechnen ein bisschen „physikalisch“:

$$z = \gamma(t) = e^{it} \ \Rightarrow\ \frac{dz}{dt} = \dot{\gamma}(t) = ie^{it} = iz \ \Rightarrow\ dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}.$$

Mit

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$$

erhalten wir

$$\frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{i} \cdot \frac{dz}{(a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})) \cdot z} = \frac{2}{i}\frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Insgesamt bekommen wir so, dass

$$J := \int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Wem das zu „unheimlich“ ist, der setze jetzt die Definition des komplexen Wegintegrals für $\int_\gamma dz/(z^2+2az+1)$ ein, um zu sehen, dass man tatsächlich $J$ bekommt.
Jetzt bestimmen wir die isolierten Singularitäten von $f\colon z \mapsto 1/(z^2+2az+1)$, welche nach der Mitternachtsformel bei

$$\omega_{1/2} = -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{a^2-1}$$

liegen. Nur die Wurzel

$$\omega_1 := -a + \sqrt{a^2-1}$$

liegt dabei in $B_1(0)$, denn einerseits ist offenbar $\omega_1 < 0$, andererseits ist wegen $a > 1$

$$a - 1 = \sqrt{a^2-2a+1} < \sqrt{a^2-2+1} = \sqrt{a^2-1}$$

auch $\omega_1 > -1$. Die andere Nullstelle liegt außerhalb von $B_1(0)$. Das Residuum von $f$ in $\omega_1$ ist dann

$$\operatorname{Res}_{\omega_1}(f) = \frac{1}{\omega_1-\omega_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}},$$

denn

$$f(z) = \frac{1}{z^2+2az+1} = \frac{1}{(z-\omega_1)(z-\omega_2)}.$$

Also erhalten wir mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\cos t} = \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2+2az+1} \\ &= \frac{1}{i}(2\pi i)\cdot \operatorname{Res}_{\omega_1}(f) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 25** (Null- und Polstellenzähler). **(a)** Sei $f$ eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in G$ eine Nullstelle von $f$ der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $g$, mit $g(z) = f'(z)/f(z)$, eine holomorphe Funktion auf $G$ mit einer isolierten Singularität in $a$ ist und es gilt: $\operatorname{Res}_a(g) = k$.

**(b)** Sei $f$ nun holomorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit einem Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in einem Punkt $a \in G$. Zeigen Sie, dass $g$, mit $g = f'/f$, holomorph mit isolierter Singularität in $a$ ist und es gilt: $\operatorname{Res}_a(g) = -k$.

**(c)** Eine holomorphe Funktion $f$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie höchstens isolierte Singularitäten hat und diese nicht wesentlich sind. Sei nun $K \subseteq G$ Kompaktum mit glattem Rand, $f$ sei meromorph auf $G$ und keine der isolierten Singularitäten und Nullstellen von $f$ liege auf $\partial K$. Mit $N_0 \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir dann die Gesamtzahl der Nullstellen von $f$ innerhalb von $K$, gewichtet jeweils mit ihren Vielfachheiten, $N_0 = \sum_{a\in f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_a(f)$. Ähnlich sein $N_\infty \in \mathbb{N}$ die Gesamtzahl der Polstellen von $f$ innerhalb von $K$, gewichtet mit ihren Vielfachheiten, $N_\infty = \sum_{a\in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}_a(f)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = N_0 - N_\infty.$$

**Lösungsvorschlag. (a)** Die isolierten Singularitäten von $g = \frac{f'}{f}$ auf $G$ sind offenbar die Nullstellen von $f$, wovon $a \in G$ eine ist. Dass $\mathrm{ord}_a(f) = k \in \mathbb{N}$ ist, impliziert, dass es ein holomorphes $h$ um $a$ mit $h(a) \neq 0$ und

$$f(z) = (z-a)^k h(z)$$

dort gibt. Es folgt

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1}h(z) + (z-a)^k h'(z)$$

um $a$, also

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-a)^{k-1}h(z)}{(z-a)^k h(z)} + \frac{(z-a)^k h'(z)}{(z-a)^k h(z)} = \frac{k}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Da $h(a) \neq 0$ ist, ist $\frac{h\prime}{h}$ um $a$ holomorph und damit hat $g$ in $a$ einen einfachen Pol mit Residuum

$$\mathrm{Res}_a(g) = k.$$

**(b)** $f$ habe nun einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in $a$. Das impliziert, dass es ein holomorphes $h$ um $a$ mit $h(a) \neq 0$ gibt und

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} h(z).$$

Das kann man beispielsweise aus der Laurententwicklung von $h$ in $a$ sehen, die so aussieht:

$$L_{h,a}(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-a)^n = (z-a)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{-k+n}(z-a)^n.$$

und $a_{-k} \neq 0$. Setzt man $h(z) := \sum_0^\infty a_{-k+n}(z-a)^n$ (um $a$), so ist also $h(a) = a_{-k} \neq 0$ und

$$f(z) = L_{h,a}(z) = (z-a)^{-k}h(z),$$

für alle $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$, für ein $r > 0$. Es folgt:

$$f'(z) = (-k) \cdot (z-a)^{-k-1}h(z) + (z-a)^{-k}h'(z)$$

und so ähnlich wie eben (man könnte die Teile (a) und (b) gemeinsam abhandeln)

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-k)(z-a)^{-(k+1)}h(z)}{(z-a)^{-k}h(z)} + \frac{(z-a)^{-k}h'(z)}{(z-a)^{-k}h(z)} = \frac{-k}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Es folgt wiederum, dass $g$ einen einfachen Pol in $a$ mit Residuum

$$\mathrm{Res}_a(g) = -k$$

hat.

**(c)** Um das Integral für den Null- und Polstellenzähler für ein meromorphes $f$ auf einem Gebiet $G$ zu bekommen, stellen wir zunächst fest, dass $g = \frac{f'}{f}$ isolierte Singularitäten in den Nullstellen von $f$ und den Polstellen von $f$ hat, aber außerhalb dieser holomorph ist, da $f$ und $f'$ dort holomorph sind und es keine Nullstellen von $f$ mehr dort gibt. Ist nun $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit glattem Rand, so können, weil die Null- und Polstellen von $f$ diskret liegen, nur jeweils endlich viele in $K$ liegen. Denn ist $D \subseteq K$ die Teilmenge der Null- und Polstellen in $K$, so ist $(K \setminus D, B_\varepsilon(p))_{p\in D}$ eine offene Überdeckung von $K$ (beachte: $D$ ist nach Definition einer diskreten Menge auch abgeschlossen, was in der Vorlesung vergessen wurde). Ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass in $B_\varepsilon(p)$ jeweils nur ein Element von $D$ liegt (nämlich $p$), so sieht man, dass, wegen der Kompaktheit von $K$, die Teilmenge $D$ endlich sein muss. Seien daher

$$D_0 = \{a_1, \dots, a_r\}$$

die Nullstellen von $f$ in $K$ und

$$D_\infty = \{b_1, \dots, b_s\}$$

die Polstellen von $f$ in $K$, also $D = D_0 \,\dot\cup\, D_\infty$. Da nach Voraussetzung $D \cap \partial K = \emptyset$ ist, können wir nun den Residuensatz auf das meromorphe $g = \frac{f'}{f}$ anwenden und finden, dass

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z)\,dz}{f(z)} &= \sum_{p\in D}\mathrm{Res}_p\Big(\frac{f'}{f}\Big) = \sum_{p\in D_0}\mathrm{Res}_p\Big(\frac{f'}{f}\Big) + \sum_{p\in D_\infty}\mathrm{Res}_p\Big(\frac{f'}{f}\Big)\\ &= \sum_{p\in D_0}\mathrm{ord}_p(f) + \sum_{p\in D_\infty}(-\mathrm{ord}_p(f)) = N_0 - N_\infty.\end{aligned}$$

**Aufgabe 26** (Satz von Rouché). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $N(f), N(g) \in \mathbb{N}$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen von $f$ bzw. $g$ in $K$ (gezählt mit Vielfachheiten). Schließlich gelte für alle $z \in \partial K$:

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt: $N(f) = N(g)$. (Hinweis: Betrachten Sie die *Homotopie* $(h_t)_{t\in[0,1]}$ mit $h_t = f + t(g - f)$ und untersuchen Sie $N(h_t)$ in Abhängigkeit von $t$.)

**Lösungsvorschlag.** Wegen $|g - f| < |f|$ auf $\partial K$, kann weder $f$ noch $g$ einen Nullstelle auf $\partial K$ haben. In so einem Punkt würde nämlich bei $f(z) = 0$ folgen: $|g(z)| < 0$ bzw. bei $g(z) = 0$: $|f(z)| < |f(z)|$. Alle Nullstellen von $f$ bzw. $g$ in $K$ liegen also in $\mathring{K}$. Das Gleiche gilt für die „Zwischenfunktionen“ $h_t\colon G \to \mathbb{C}$ ($t \in [0, 1]$),

$$h_t(z) = f(z) + t(g(z) - f(z)).$$

Wegen

$$t \cdot |g(z) - f(z)| \le |g(z) - f(z)| < |f(z)|,$$

für alle $t \in [0, 1]$ und $z \in \partial K$, hat auch $h_t$ keine Nullstellen auf $\partial K$. Beachte, dass $h_0 = f$ und $h_1 = g$ ist. Für die Anzahl $N(h_t) \in \mathbb{Z}$ der Nullstellen von $h_t$ (mit Vielfachheiten gezählt) gilt deshalb nach Aufgabe-25:

$$N(h_t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{h_t'(z)\,dz}{h(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f'(z) + t(g'(z) - f'(z))}{f(z) + t(g(z) - f(z))}\,dz.$$

Der Integrand dieses Integrals hängt nun offenbar stetig von $t$ ab und daher auch $N(t) := N(h_t)$. Aber $N\colon [0, 1] \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ hat ganzzahlige Werte und muss daher konstant sein (vgl. Aufgabe-13). Es ist also

$$N(f) = N(0) = N(1) = N(g).$$