Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
21.06.2021
Blatt 08

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein *dynamisches System auf* G ist ein stetig differenzierbares $\varphi\colon \Omega \to G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, wobei gilt:

(a) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$ ist offen mit $\{0\} \times G \subseteq \Omega$ und $I(x) := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in \Omega\}$ ist ein offenes Intervall;

(b) (i) $\varphi^0(x) = x$ für alle $x \in G$;

(ii) Ist $(t, x) \in \Omega$, so ist für $s \in \mathbb{R}$ das Paar $(t + s, x) \in \Omega$, genau wenn $(s, \varphi^t(x)) \in \Omega$ ist, und es gilt dann:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Man nennt dann für jedes $x \in G$ die Kurve $\varphi(x)\colon I(x) \to G$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, die *Dynamik von* x.

Aufgabe 27. Sei $\varphi\colon \Omega \to G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Man definiert das *zugehörige Vektorfeld* $f = f_\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ auf G durch

$$f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t(x).$$

Zeigen Sie: Für jedes $x_0 \in G$ löst die Kurve $\varphi(x_0)\colon I(x_0) \to G$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Lösungsvorschlag. Wir haben zu zeigen, dass für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt:

$$\frac{d\varphi^t}{dt}(x) = f(\varphi^t(x)),$$

nicht nur für $t = 0$. Dazu benutzen wir die „Flussgleichung“

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x),$$

für alle $(t,x) \in \Omega$ und $s \in I(\varphi^t(x))$. Es ist nämlich

$$\frac{d\varphi^t}{dt}(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^{t+s}(x) = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^s(\varphi^t(x) = f(\varphi^t(x)).$$

Wegen $\varphi^0(x) = x$ löst daher $\varphi(x_0)\colon I(x_0) \to G$, $t \mapsto \varphi^t(x_0)$, das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

für jedes $x_0 \in G$.

Aufgabe 28. Sei $\varphi\colon \Omega \to G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $a \in G$ heißt *Gleichgewichtslage von* φ, wenn für alle $t \in I(a)$ gilt: $\varphi^t(a) = a$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ das zu φ gehörende Vektorfeld, so gilt: $a \in G$ ist genau dann Gleichgewichtslage von φ, wenn $f(a) = 0$ ist. [Nachtrag: Benutzen Sie für die Rückrichtung, dass φ 2-mal stetig differenzierbar und damit f lokal Lipschitz-stetig ist sowie die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems dann nach Picard Lindelöf.]

(b) Sei nun $x_0 \in G$ mit $I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0)$ und $t_+(x_0) = \infty$. Weiter sei $a \in G$ und es gelte

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x_0) = a.$$

Zeigen Sie, dass a eine Gleichgewichtslage von φ sein muss.

Lösungsvorschlag. (a) Ist $a \in G$ Gleichgewichtslage, so ist also $\varphi(a)\colon I(a) \to G$ durch $\varphi^t(a) = a$, für alle $t \in I(a)$. Es folgt, dass

$$f(a) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t(a) = 0$$

ist. Umgekehrt wollen wir (mit dem Nachtrag) benutzen, dass φ 2-mal stetig differenzierbar und damit f stetig differenzierbar, insbesondere also lokal Lipschitz-stetig, ist und damit der Eindeutigkeitssatz (samt dem Lemma aus der Vorlesung, dass zwei Lösungen des (AWP) auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsintervalle übereinstimmen) von Picard-Lindelöf gilt. Ist nämlich dann $f(a) = 0$, so löst die Kurve $\alpha\colon \mathbb{R} \to G$, $\alpha(t) = a$, das (AWP) $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = a$ auf G, genauso wie nach Aufgabe-27 die Kurve $\varphi(a)\colon I(a) \to G$. daher muss

$$\varphi(a) = \alpha|I(a)$$

sein. Es ist also a Gleichgewichtslage von φ.

(b) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist $G_s := \{x \in G : \ s \in I(x)\} \subseteq G$ offen und $\varphi^s\colon G_s \to G$, $x \mapsto \varphi^s(x)$, ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild (welches gerade G_{-s} ist, mit Inversem φ^{-s} wegen der Flussgleichung $\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}$, für alle $s, t \in \mathbb{R}$). Insbesondere ist φ^s stetig. Sei nun $s \in I(a)$ beliebig. Dann können wir ein $\tau \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $s \in (t_-(x_0) - \tau, \infty)$ ist. Im folgenden betrachten wir nun $t \in (\tau, \infty)$ und können jeweils den Limes für $t \to \infty$ bilden. Nach Voraussetzung ist zunächst $\varphi^t(x_0) \to a$ und damit auch $\varphi^{s+t}(x_0) \to a$ (bei festem s und für $t \to \infty$). Wegen der Stetigkeit von φ^s und erneut der Flussgleichung ist deshalb

$$\varphi^s(a) = \lim_{t\to\infty} \varphi^s(\varphi^t(x_0)) = \lim_{t\to\infty} \varphi^{s+t}(x_0) = a.$$

Das zeigt, dass a eine Gleichgewichtslage ist.

Aufgabe 29. Wir betrachten das (nur) stetige Vektorfeld $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

auf $\mathbb{R}$ verschiedene Lösungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

Lösungsvorschlag. Das (AWP) $\dot{x} = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, hat zunächst mal sicher die Lösung $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha(t) = 0$, denn $\alpha(0) = 0$ und

$$\dot{\alpha}(t) = 0 = \sqrt{|\alpha(t)|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Für $t > 0$ (und $x > 0$) rechnen wir mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= dt, \\ \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}} &= \int_0^t ds \;\Rightarrow\; 2\sqrt{y}|_0^x = s|_0^t \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x} = t \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{1}{4}t^2. \end{aligned}$$

Und nun prüfen wir zur Sicherheit noch mal nach, dass $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & \text{für } t > 0 \end{cases},$$

stetig differenzierbar ist mit $\beta(0) = 0$, $\dot{\beta}(t) = 0 = \sqrt{|\beta(t)|}$ für $t \leq 0$ und

$$\dot{\beta}(t) = \frac{1}{2}t = \sqrt{|\beta(t)|} \quad \text{für } t > 0,$$

also wirklich eine Lösung von (AWP) ist. Offenbar ist aber $\alpha \neq \beta$.

Aufgabe 30. Bestimmen Sie mit der Methode der Trennung der Variablen alle maximalen Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2$$

und skizzieren Sie das Phasendiagramm auf $\mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag. Es ist also (zunächst für $x_0 \neq 0$)

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^x \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y}|_{x_0}^x = s|_0^t \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \;\Rightarrow\; -\frac{1}{x} = t - \frac{1}{x_0} = \frac{tx_0 - 1}{x_0}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0},$$

und diese Formel können wir auch für $x_0 = 0$ nehmen, wo x_0 natürlich eine Gleichgewichtslage ist. Um nun die maximalen Definitionsgebiete bzw. das maximale dynamische System zu dieser gewöhnlichen Differentialgleichung und damit das Phasendiagramm auf $\mathbb{R}$ zu ermitteln, unterscheiden wir die Bedingungen $x_0 < 0$, $x_0 = 0$ und $x_0 > 0$. Im Falle $x_0 < 0$ ist nun offenbar das maximale Definitionsintervall gerade $I(x_0) = (\frac{1}{x_0}, \infty)$ und für die Lösungskurve gilt:

$$\lim_{t \to 1/x_0} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to \infty} x(t) = 0.$$

Nur für $x_0 = 0$ ist das Definitionsintervall die ganzen reellen Zahlen, $I(x_0) = \mathbb{R}$, und $x(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$ (Gleichgewichtslage). Im Falle $x_0 > 0$ schließlich ist $I(x_0) = (-\infty, 1/x_0)$ und

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \to 1/x_0} x(t) = \infty.$$

Es gibt damit im Phasenraum $\mathbb{R}$ (bis auf Reparametrisierungen) genau drei Bahnen:

- eine, die in positiver Richtung über die neagtiven Zahlen läuft (und in endlicher Zeit aus $-\infty$ kommt):
- eine Gleichgewichtslage in $x_0 = 0$;
- und eine, die die in positiver Richtung über die positiven Zahlen läuft (und in endlicher Zeit in $+\infty$ ist).