Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
28.06.2021
Blatt 09

# Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

**Aufgabe 31.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf $G$. Sei ferner für jedes $y \in G$ mit $\alpha_y\colon I(y) \to G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y$$

auf $G$ notiert. Sei nun $y_0 \in G$ und $t \in I(y_0)$ sowie $y_1 = \alpha_{y_0}(t)$. Zeigen Sie, dass $s \in I(y_1)$ ist, genau wenn $t + s \in I(y_0)$ ist und dann gilt:

$$\alpha_{y_1}(s) = \alpha_{y_0}(s + t).$$

**Lösungsvorschlag.** Wir betrachten die beiden Kurven

$$\alpha\colon I(y_1) \to G, \quad \alpha(s) = \alpha_{y_1}(s),$$

und

$$\beta\colon (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) - t) \to G, \quad \beta(s) = \alpha_{y_0}(s + t).$$

Hierbei ist $I(y_0) = (t_-(y_0), t_+(y_0))$ mit $t_-(y_0) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(y_0) \in (0, \infty]$ und wir setzen natürlich $-\infty - t := -\infty$ bzw. $+\infty - t := +\infty$, für $t \in \mathbb{R}$. Beide Kurven lösen nun das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y_1$$

auf $G$, denn bei $\alpha$ ist das gerade die Definition von $\alpha_{y_1}$ und bei $\beta$ gilt zunächst $\beta(0) = \alpha_{y_0}(t) = y_1$ und dann

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds}\alpha_{y_0}(s + t) = \frac{d}{d\sigma}|_{\sigma = s+t}\alpha_{y_0}(\sigma) = f(\alpha_{y_0}(s + t)) = f(\beta(s)),$$

für alle $s \in (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) - t)$. Weiterhin sind beide Lösungen maximal. Bei $\alpha$ ist dies nach Definition von $\alpha_{y_1}$ so, bei $\beta$ nach Definition von $\alpha_{y_0}$, da $\beta$ im Parameterintervall nur um $t$ verschoben wurde. Daher muss

$$I(y_1) = (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) + t)$$

sein, also $s \in I(y_1)$ genau wenn $s + t \in I(y_0)$ ist. Denn nach dem Satz von Picard-Lindelöf (genauer dem daraus folgenden Lemma aus der Vorlesung) folgt, dass $\alpha$ und $\beta$ auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, aber da diese jeweils maximal sind, müssen auch die Definitionsbereiche übereinstimmen und damit ist also $\alpha = \beta$.

**Aufgabe 32.** Für $\omega > 0$ bezeichnet man das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0$$

als „harmonischen Oszillaor". Bestimmen Sie den Phasenraum $G$ für das Problem und dann das zugehörige maximale dynamische System $\varphi\colon \Omega \to G$ (Hinweis: Machen Sie einen „Ansatz" für $x$ als Linearkombination der Lösungen $t \mapsto \cos(\omega x)$ und $t \mapsto \sin(\omega x)$.)

**Lösungsvorschlag.** Der Phasenraum für den (1-dimensionalen) harmonischen Oszillator mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, & y(0) &= y_0, \end{aligned}$$

ist offenbar $G = \mathbb{R}^2$. Wir wissen schon, dass die beiden trigonometrischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(\omega t)$ und $t \mapsto \sin(\omega t)$ die Differentialgleichung lösen und die Differentialgleichung ist *linear*, d.i.: das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (y, -\omega^2 x)$$

ist linear. woraus folgt, dass jede Linearkombination $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

auch eine Lösung ist. Denn erfüllen zwei Kurven $\beta_1, \beta_2$ die Gleichung, so gilt für eine Linearkombination $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2$ wegen der Linearität von $f$

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2)(t) = \lambda_1\dot{\beta}_1(t) + \lambda_2\dot{\beta}_2(t) = \lambda_1 f(\beta_1(t)) + \lambda_2 f(\beta_2(t)) = f(\lambda_1\beta_1(t) + \lambda_2\beta_2(t)).$$

Wir versuchen nun $A, B \in \mathbb{R}$ so einzustellen, dass wir die Anfangsbedingungen $\alpha(0) = x_0$ und $\dot{\alpha}(0) = y_0$ erfüllen. Es ist

$$\dot{\alpha}(t) = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t),$$

also

$$\alpha(0) = A, \quad \dot{\alpha}(0) = B\omega.$$

Es folgt, dass

$$\alpha(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

die maximale Lösung des (AWP) ist. Da damit $I(x, y) = \mathbb{R}$ ist, für alle $(x, y) \in \mathbb{R}$, ist hier $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ und das zugehörige (maximale) dynamische System auf $G$ gegeben durch

$$\varphi^t(x, y) = (x\cos(\omega t) + \frac{y}{\omega}\sin(\omega t), -x\omega\sin(\omega t) + y\cos(\omega t)).$$

**Aufgabe 33.** Sei $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu $x_0 \in G$ sein $\alpha\colon I \to G$ die maximale Lösungskurve zum Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ auf $G$. Es existiere nun ein $T \in I$ mit $T > 0$, so dass $\alpha(T) = x_0$ ist. (Wenn $T > 0$ die kleinste positive reelle Zahl mit dieser Eigenschaft ist, nennen wir $x_0$ *einen periodischen Punkt der Periode* $T$.) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $I = \mathbb{R}$ ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha(t + T) = \alpha(t).$$

**Lösungsvorschlag.** Da für das maximale $\alpha = \alpha_{x_0}\colon I(x_0) \to G$ wegen $\alpha(T) = x_0$ für ein $T > 0$ ist, gilt nach Aufgabe-31, dass

$$t_-(x_0) = t_-(x_0) - T, \quad t_+(x_0) = t_+(x_0) - T$$

ist, was man nur mit $t_-(x_0) = -\infty$ und $t_+(x_0) = +\infty$ erfüllen kann. Nach der Flussbedingung aus Aufgabe-31 muss dann für alle $t \in \mathbb{R} = I(x_0)$ gelten:

$$\alpha(t+T) = \alpha_{x_0}(t+T) = \alpha_{\alpha(T)}(t) = \alpha_{x_0}(t) = \alpha(t).$$

**Aufgabe 34.** Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi\colon \Omega \to G$, $(t,x) \mapsto \varphi^t(x)$, ein dynamisches System auf $G$ sowie $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ sein zugehöriges Vektorfeld. Eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon G \to \mathbb{R}$ heißt *ein* 1. *Integral für* $\varphi$, wenn für alle $(t,x) \in \Omega$ gilt: $H(\varphi^t(x)) = H(x)$. Zeigen Sie, dass $H$ genau dann ein 1. Integral ist, wenn *die Ableitung* $X_f H\colon G \to \mathbb{R}$ *von* $H$ *in Richtung* $f$, d.i.

$$X_f H(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial H}{\partial x_j}(x),$$

verschwindet, $X_f H = 0$.

**Lösungsvorschlag.** „$\Rightarrow$“: Sei also $H\colon G \to \mathbb{R}$ ein 1. Integral für $\varphi\colon \Omega \to G$ (mit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$). Dann ist bei festem $x \in G$ für alle $t \in I(x)$:

$$H(\varphi^t(x)) = H(x).$$

Differentiation nach $t$ an der Stelle $t = 0$ liefert dann mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}|_{t=0} H(\varphi^t(x)) = \langle \mathrm{grad}(H)(\varphi^0(x)), \frac{d}{dt}_{t=0}\varphi^t(x)\rangle = \langle \mathrm{grad}(H)(x), f(x)\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_j}(x) \cdot f_j(x). \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Ist umgekehrt $X_f H = 0$, so schließen wir

$$\frac{d}{dt} H(\varphi^t(x)) = \langle \mathrm{grad}(H)(\varphi^t(x)), \frac{d\varphi^t}{dt}(x)\rangle = \langle \mathrm{grad}(H), f\rangle(\varphi^t(x) = X_f H(\varphi^t(x)) = 0,$$

für alle $x \in G$ und $t \in I(x)$. Deshalb muss für festes $x \in G$ das stetig differenzierbare $I(x) \to \mathbb{R}$, $t \mapsto H(\varphi^t(x))$, konstant sein, also überall gleich seinem Wert bei $t = 0 \in I(x_0)$, d.i.

$$H(\varphi^t(x)) = H(\varphi^0(x)) = H(x).$$

Es ist damit $H$ ein 1. Integral für $\varphi$.