Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
05.10.2021
Blatt 10

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 35. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die *lineare Differentialgleichung* n*. Ordnung*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + + a_{n-1}\dot{x} + a_n x = 0 \tag{1}$$

auf $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Lösungsraum $L_{(h)} := \{x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) : x \text{ löst } (1)\}$ ein n-dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ist.

(b) Seien $x_1, \ldots, x_n \in L_{(h)}$. Dann bilden wir die sogenannte *Wronski-Determinante von* $(x_1, \ldots, x_n)$ $W: I \to \mathbb{R}$ durch

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (t).$$

Zeigen Sie: Falls W eine Nullstelle hat, so ist W schon überall Null und es gilt: $(x_1, \ldots, x_n)$ ist Basis von $L_{(h)}$, genau wenn $W \neq 0$ ist.

Lösungsvorschlag. (a) Um die lineare Gleichung n. Ordnung (1) zu lösen, betrachten wir das System $(1')$

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 \end{array}$$

1. Ordnung auf $\mathbb{R}^n$. Dann erhalten wir einen Lösungsraum $\tilde{L}_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ von $(1')$. Bezeichnen wir mit $\pi_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die 1. Komponente, $x \mapsto x_1$, so induziert dies eine Projektion

$$\pi_1^* : \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \pi_1 \circ \varphi.$$

Wir wissen bereits, dass $\tilde{L}_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^n)$ ein n-dimensionaler Unterraum ist und π_1^* den Lösungsraum $\tilde{L}_{(h)}$ bijektiv auf $L_{(h)}$ abbildet. Jetzt zeigen wir zunächst, dass $L_{(h)}$ sogar Teilmenge von $\mathcal{C}^n(I;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ ist, denn $x_2, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ und

$$x_2 = \dot{x},\ \cdots,\ x_n = x^{(n-1)},$$

und damit ist wegen $x^{(n-1)} \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ auch $x \in \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$. Da π_1^* linear ist, ist $\operatorname{im}(\pi_1^*) \subseteq \mathcal{C}^n(I;\mathbb{R})$ ein Untervektorraum. Schließlich ist $\pi_1^*|\tilde{L}_{(h)}$ injektiv, denn ist $x_1 = \pi_1^*(x) = 0$, so ist auch

$$x_2 = \dot{x}_1 = 0,\ \cdots,\ x_n = x_1^{(n-1)} = 0,$$

also $x = 0$. Daraus folgt, dass auch $L_{(h)} = \operatorname{im}(\pi_1^*)$ Dimension n hat.

(b) Seien nun $x_1, \dots, x_n \in L_{(h)}$. Wir betrachten dann die zugehörigen Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \tilde{L}_{(h)}$ mit

$$\varphi_j = (x_j, \dot{x}_j, \dots, x_j^{(n-1)}), \quad (j = 1, \dots, n).$$

Nun ist $(x_1, \cdots, x_n)$ genau dann linear unabhängig, wenn $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ es ist, denn aus

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

folgt durch Differentiation auch

$$\lambda_1 x_1^{(k)} + \cdots + \lambda_n x_n^{(k)} = 0,$$

für $k = 0, \dots, n-1$, also

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Umgekehrt folgt aus $\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$ durch Anwenden von π_1^* auch $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$. Nun misst die Wronski-Determinante offenbar gerade, ob $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem (FDS) für $(1')$ ist und damit ist $W = 0$ schon dann, wenn es eine Nullstelle in I hat. Es ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ FDS, genau wenn $W \neq 0$ ist und mit Teil (a) wissen wir, dass $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ Basis von $\tilde{L}_{(h)}$ ist, genau wenn $(x_1, \dots, x_n)$ Basis von $L_{(h)}$ ist.

Aufgabe 36. *Die Differentialgleichung der (ungedämpften) erzwungenen Schwingung* ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A\cos(\omega t)$$

mit Konstanten $\omega_0, \omega, A \in \mathbb{R}_+$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Nicht-Resonanzfall $\omega \neq \omega_0$. (Hinweis: Wenn Sie die Rechnung mit der Variation der Konstanten vermeiden wollen, versuchen Sie eine spezielle Lösung zu erraten („Ansatz“).)

Lösungsvorschlag. Wir wissen bereits, dass ein (FDS) der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

durch $(\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t))$ gegeben ist, denn beide Funktionen lösen offenbar (2) und ihre Wronski-Determinante verschwindet nicht:

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \omega_0\cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} &= \omega_0(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \\ &= \omega_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Um die allgemeine Lösung im *Nicht-Resonanzfall* $\omega \neq \omega_0$ zu bekommen, machen wir den Lösungsansatz

$$\psi(t) = c \cdot \cos(\omega t)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, die von ω, ω_0, A abhängen mag.
[Bemerkung: Die Vorstellung dabei ist, dass dem System durch die „äußere Kraft“, die durch die Inhomogenität $t \mapsto A\cos(\omega t)$ in das System eingespeist wird, diese Schwingung „aufgezwungen“ wird (mit einer Amplitude c, die sich, je nachdem wie nah die „äußere Frequenz“ ω der „Eigenfrequenz“ ω_0 nahe kommt, durchaus verstärken kann. Alternativ kann man zu einer speziellen Lösung (ohne physikalische Intuituon) auch mit der Methode der Variation der Konstanten kommen. Dazu muss mann

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

invertieren und dann das Integral

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s)\, ds$$

mit $b(s) = (0, A\cos(\omega s))$, mit partieller Integration berechnen, um auf die variierenden Konstanten $u_1, u_2 \colon I \to \mathbb{R}$ für

$$\psi(t) = u_1(t)\cos(\omega_0 t) + u_2(t)\sin(\omega_0 t)$$

zu kommen.]
Wir rechnen hier mit unserem „Ansatz“ zunächst:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\omega c \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{\psi} &= -\omega^2 c \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi &= -\omega^2 c \cos(\omega t) + \omega_0^2 c \cos(\omega t) \\ &= (-\omega^2 c + \omega_0^2 c)\cos(\omega t), \end{aligned}$$

und das bekommen wir also tatsächlich zu $A\cos(\omega t)$, wenn $-\omega^2 c + \omega_0^2 c = A$, also

$$c = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ist. Damit ist

$$\psi(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos(\omega t) + a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

die allgemeine Lösung, wobei man $a, b \in \mathbb{R}$ noch durch die Anfangsbedingungen $\psi(0)$ und $\dot{\psi}(0)$ ausdrücken kann, wenn man möchte.

Aufgabe 37. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen sowie $A \colon I \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $\Phi \colon I \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ eine Lösung von $\dot{\Phi} = A\Phi$ auf $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\Delta \colon I \to \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \det(\Phi(t))$, die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \mathrm{spur}(A)x$$

löst. (Hinweis: Schreiben Sie $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ mit den Zeilen $\varphi_i \colon I \to \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \dots, n)$ und benutzen Sie die Produktregel in der Leibnizformel für $\det(\Phi)$ sowie $\dot\varphi_i = \sum_j a_{ij}\varphi_j$ $(i = 1, \dots, n)$ aus $\dot\Phi = A\Phi$.)

Lösungsvorschlag. [Vorbemerkung: Man beachte, dass in der Aufgabenstellung die Spalten von Φ nicht notwendig ein Lösungs-Fundamentalsystem (FDS) von $\dot x = Ax$ auf $\mathbb{R}^n$ zu sein brauchen. Die Funktion $\Delta \colon I \to \mathbb{R}$, $\Delta = \det(\Phi)$, misst gerade, ob das so ist. Sie ist entweder identisch Null oder hat gar keine Nullstellen. Im letzteren Fall ist Φ dann FDS. Die Aufgabe zeigt dann, dass Δ nach Trennung der Variablen durch

$$\Delta(t) = \Delta_0 \exp\Big(\int_0^t \operatorname{spur}(A(s))\, ds\Big)$$

gegeben ist.]

Wir betrachten also nun die Zeilen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von φ. Die Bedingung $\dot\Phi = A\Phi$ bedeutet für die Einträge φ_{ij} von Φ offenbar

$$\dot\varphi_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\varphi_{kj}$$

$(1 \le i, j \le n)$. Da (φ_{ij}) bei festem $i \in \{1, \dots, n\}$ offenbar die Komponenten von φ_i sind, heißt dies, dass

$$\dot\varphi_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}\varphi_k$$

(für $i = 1, \dots, n$) ist, dass also $\dot\varphi_i(t)$ punktweise diese Linearkombination von $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ist. Das hilft jetzt bei der Differentiation der Determinante. In der Leibniz-Formel

$$\det\Phi = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \varphi_{i\sigma(i)}$$

ergibt nun die Leibnizsche Produktregel, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\det\Phi &= \sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i=1}^n \dot\varphi_{i\sigma(i)} \prod_{j \ne i} \varphi_{j\sigma(j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \dot\varphi_{i\sigma(i)} \prod_{j \ne i} \varphi_{j\sigma(j)} \right) \end{aligned}$$

ist. Hier ist nun für jedes $i = 1, \dots, n$ der i. Summand offenbar die Determinante der Matrix, bei der man die Zeile φ_i durch $\dot\varphi_i$ ersetzt, also

$$\frac{d}{dt}\det\Phi = \frac{d}{dt}\det(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T = \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \dot\varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)^T.$$

Setzt man nun $\dot\varphi_i = \sum_k a_{ik}\varphi_k$ ein, so liefert nur der Summand mit $k = i$ einen Beitrag, da φ_k für $k \ne i$ schon in einer weiteren Zeile steht, also

$$\frac{d}{dt}\det\Phi = \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \sum_k a_{ik}\varphi_k, \dots, \varphi_n)^T$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \det(\varphi_1, \ldots, a_{ii}\varphi_i, \ldots, \varphi_n)^T \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)^T \\
&= \operatorname{spur}(A) \det \Phi.
\end{aligned}
$$

Es löst also Δ die lineare Differentialgleichung $\dot{x} = \operatorname{spur}(A)x$ auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 38. *Die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung* wird für Konstanten $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

(wobei $\gamma > 0$ die Dämpfung beschreibt). Geben Sie eine Basis des Lösungsraumes im so genannten *Kriechfall* an, wo $\Delta := 4\omega^2 - \gamma^2 < 0$ ist. (Die Fälle $\Delta = 0$ und $\Delta > 0$ behandeln wir später.) (Hinweis: Schreiben Sie (3) als ein System $\dot{z} = Az$ mit $A \in \operatorname{Mat}_2\mathbb{R}$ und versuchen Sie A zu diagonalsieren. Machen Sie dann einen geeigneten linearen Koordintenwechsel $z = Sw$ mit $S \in \operatorname{GL}_2\mathbb{R}$. Oder machen Sie gleich einen „Ansatz“ $x(t) = e^{\lambda t}$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$).)

Lösungsvorschlag. [Vorbemerkung: Übergang zum System auf $\mathbb{R}^2$ führt auf $\dot{z} = Az$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Will man diese Matrix diagonalisieren, führt dies auf die Eigenwerte λ von A, die durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$
\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + \gamma \end{pmatrix} \\
&= \lambda(\lambda + \gamma) + \omega^2 = \lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2
\end{aligned}
$$

gegeben sind. Hat dieses zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so führt dies zu einem Fundamentalsystem durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ eines transformierten Systems. Die Transformationsmatrix $S \in \operatorname{GL}_2\mathbb{R}$, die die Eigenvektoren von A in den Spalten stehen hat, kann in der 1. Zeile mit $(1, 1)$ gewählt werden, woraus dann für die ersten Komponenten der Fundamentallösungen des System $\dot{z} = Az$ die Funktionen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ resultieren. Es ist dann $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ einen Basis des Lösungsraums für (3). (Im Falle, dass die Eigenwerte komplex (und nicht-reell) sind oder zusammenfallen, ist die Situation anders.)]

Zu der gleichen Lösung kommt man, wenn man den „Exponentialansatz“

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ macht. Einsetzen in (3) liefert dann wegen

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} :$$

$$0 = \ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = e^{\lambda t}(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2).$$

Das führt auf *die charakteristische Gleichung*

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0,$$

welche mit der Mitternachtsformel zu

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

mit der *Diskriminante* $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$ führt. Im sogenannten „Kriechfall“ wo $\Delta < 0$ ist, hat man also zwei reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, welche also damit zur Basis $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ für den 2-dimensionalen Lösungsraum $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ führt (da ihre Wronski-Determinante nicht verschwindet, die gerade $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)t} \neq 0$ ist).