Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
12.07.2021
Blatt 11

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 39. (a) Berechnen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Bx$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

Lösungsvorschlag. (a) Zunächst versuchen wir A zu diagonalisieren. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ von A,

$$\chi_A(t) = \det(tE_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t & -3 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) - 3 = t^2 + 2t - 3.$$

Dieses hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1 - (-3)} = -1 \pm 2.$$

Also hat A zwei (einfache) reelle Eigenwerte bei $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = +1$. Nun berechnen wir eine Basis von Eigenvektoren von A. Für $\lambda_1 = -3$ erhalten wir

$$-3E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

also wird der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, -3) = \ker(-3E_2 - A)$ z.B. von $v_1 = (1, -1)^T$ erzeugt. Für $\lambda_2 = +1$ ist

$$E_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also wird $\mathrm{Eig}(A, 1)$ z.B. von $v_2 = (3, 1)^T$ erzeugt. Der Koordinatenwechsel $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $y \mapsto x = Sy$, mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert dann das System auf

$$\dot{y} = Dy$$

mit $D = S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Dann ist $(\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix})$ ein Fundamentalsystem (FDS) für $\dot{y} = Dy$ und damit löst $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 3e^{\lambda_2 t} \\ -e^{\lambda_t} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

die Differentialgleichung $\dot{\Phi} = A\Phi$ (mit $\Phi(0) = E_2$) auf $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Damit ist also

$$(\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix})$$

ein FDS für $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^2$.

(b) Ähnlich gehen wir bei B vor:

$$\chi_B(t) = \det \begin{pmatrix} t & +2 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix} = t(t-2) + 2 = t^2 - 2t + 2$$

mit den dieses Mal nicht-reellen Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i.$$

Deshalb können wir nun nur in $\mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ diagonalisieren und berechnen die komplexen Eigenräume:

$$(1+i)E_2 - B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix},$$

also $\mathrm{Eig}(B, 1+i) = \langle (2, -1-i)^T \rangle$ und

$$(1-i)E_2 - B = \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix},$$

was zu $\mathrm{Eig}(B, 1-i) = \langle (2, -1+i)^T \rangle$ führt. Die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}$$

transformiert also $\dot{z} = Bz$ auf $\dot{w} = Dw$ mit $D = \mathrm{diag}(1+i, 1-i)$. Das führt also zur Lösung

$$\Phi = S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1 t} & 2e^{\lambda_2 t} \\ (-1-i)e^{\lambda_1 t} & (-1+i)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

von $\dot{\Phi} = A\Phi$ auf $\mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$. Damit ist

$$(\begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1 t} \\ (-1-i)e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_2 t} \\ (-1+i)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix})$$

ein FDS für $\dot{z} = Bz$ auf $\mathbb{C}^2$. Wir wissen nun, dass die Real- und Imaginärteile dieser Lösung den reellen Lösungsraum $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ von $\dot{x} = Bx$ erzeugen und versuchen es mal mit den Realteilen, um eine Basis von $L_{(h)}$ zu finden:

$$\mathrm{Re}(2e^{\lambda_1 t}) = 2\mathrm{Re}(e^{(1+i)t}) = 2e^t\mathrm{Re}(e^{it}) = 2e^t \cos t,$$

und

$$\mathrm{Re}((-1-i)e^{\lambda_1 t}) = \mathrm{Re}((-1-i)e^t e^{it}) = \mathrm{Re}((-1-i)e^t(\cos t + i \sin t)) = e^t(-\cos t + \sin t),$$

und notieren

$$\varphi_1 := (2e^t \cos t, e^t(-\cos t + \sin t))^T.$$

Und weiter:

$$\mathrm{Re}(2e^{\lambda_2 t}) = 2\mathrm{Re}(e^{(1-i)t}) = 2e^t\mathrm{Re}(\cos(-t) + i \sin(-t)) = 2e^t \cos t,$$

was wohl wieder auf φ_1 führen d?urfte. Deshalb nehmen wir jetzt mal den Imaginärteil:

$$\mathrm{Im}(2e^{\lambda_2 t}) = 2e^t \sin(-t) = -2e^t \sin t$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}((-1+i)e^{\lambda_2 t}) &= e^t\mathrm{Im}((-1+i)(\cos(-t) + i \sin(-t)) = e^t(-\sin(-t) + \cos(-t)) \\ &= e^t(\cos t + \sin t).\end{aligned}$$

Wir setzen damit

$$\varphi_2 := (-2e^t \sin t, e^t(\cos t + \sin t))^T$$

und prüfen jetzt noch, ob (φ_1, φ_2) linear unabhängig (in einem Punkt) ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}&\det \begin{pmatrix} 2e^t \cos t & -2e^t \sin t \\ e^t(-\cos t + \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \\ =\ & 2e^{2t}(\cos^2 t + \cos t \sin t) + 2e^{2t}(-\cos t \sin t + \sin^2 t) \\ =\ & 2e^{2t} \neq 0.\end{aligned}$$

Es ist damit (φ_1, φ_2) ein FDS für $\dot{x} = Bx$ auf $\mathbb{R}^2$ und die allgemeine Lösung damit durch $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ gegeben.

Aufgabe 40. Berechnen Sie eine Basis für den Lösungsraum der Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung (vgl. Aufgabe-38)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

(mit $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$) auf $\mathbb{R}$ nun auch in den folgenden Fällen für die Diskrininante $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$:

(a) $\Delta > 0$ (Schwingungsfall)

(b) $\Delta = 0$ (aperiodischer Grenzfall)

Lösungsvorschlag. Der Lösungsansatz $x = e^{\lambda t}$ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$) führt auf die charakteristische Geichung (vgl. Aufgabe-38)

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

und $\Delta := 4\omega^2 - \gamma^2$.

(a) Im Falle $\Delta > 0$ sind die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ konjugiert komplex zueinander und nicht reell:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

aber einfach. Deshalb bildet dann $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ eine komplexe Basis des Lösungrraumes $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ von

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

auf $\mathbb{C}$. Wir berechnen den Realteil von $e^{\lambda_1 t}$:

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}) = \mathrm{Re}(e^{\frac{-\gamma}{2}t} \cdot e^{i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t).$$

Und der Imaginärteil von $e^{\lambda_2 t}$ ist:

$$\mathrm{Im}(e^{\lambda_2 t}) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t).$$

Die Wronski-Detrminante von

$$\mathcal{A} := (\exp(-\frac{\gamma}{2}t)\cos(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t), \exp(\frac{-\gamma}{2}t)\sin(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t))$$

ist nicht Null, wie man ähnlich wie in Aufgabe-39 sieht. Damit ist $\mathcal{A}$ eine Basis von $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) In diesem Fall $\Delta = 0$ bekommt die charakteristische Gleichung eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -\gamma/2$. Die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

bekommt nur einen 1-dimensionalen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_2 - A)$, denn

$$\lambda E_2 - A = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -1 \\ \omega^2 & \gamma/2 \end{pmatrix}$$

ist nicht die Nullmatrix,

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \langle(-1, \gamma/2)^T\rangle.$$

Es ist also in diesem Fall A nicht diagonalisierbar. Die Jordansche Normalform zu A ist deshalb

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und eine Basis für den Koordinatenwechsel bekommt man durch $((\lambda E_2 - A)v, v)$, wo v ein nicht-triviales Element des Hauptraumes

$$\mathrm{Hau}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_2 - A)^2$$

ist. In unserem Fall ist $(\lambda E_2 - A)^2 = 0$ also $\mathrm{Hau}(A,\lambda) = \mathbb{R}^2$, und wir können aus diesem frei wählen. Unsere Wahl fällt auf $v := (0,1)^T$, weil dann

$$w = (\lambda E_2 - A)v = (-1, \gamma/2)^T$$

ist, den wir schon eben als Basisvektor für $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ identifiziert haben. Die invertierbare Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma/2 & 1 \end{pmatrix}$$

konjugiert dann A auf B: $S^{-1}AS = B$. (Man mache mal zur eigenen Überzeugung die Probe.) Nun löst man $\dot{z} = Bz$ zunächst von unten nach oben (oder direkt mit e^{tB}):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2, \end{aligned}$$

also etwa zu $z_2 = e^{\lambda t}$ und dann

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + e^{\lambda t}$$

mit Variation der Konstanten: $z_1(t) = u(t) \cdot e^{\lambda t}$ und

$$u(t) = \int_0^t e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t}\, dt = t,$$

was somit zu dem FDS

$$\mathcal{A} = (\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix})$$

von $\dot{z} = Bz$ führt. Zurücktransformiert löst dann

$$\begin{aligned} \Phi &= S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{\lambda t} & -te^{\lambda t} \\ \frac{\gamma}{2} e^{\lambda t} & \frac{\gamma}{2} e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das System $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^2$. Die 1. Komponenten $(\exp(\lambda t), t\exp(\lambda t))$ bilden somit eine Basis für $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. [Anmerkung: Die Lösung $t \mapsto t\exp(\lambda t)$ finden die Physiker ebenso mit einem „Ansatz".]

Aufgabe 41. Ein *Newton-System* auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = f(x) \tag{1}$$

mit $m > 0$ (der Masse eines Teilchens) und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (dem Kraftfeld, in dem sich das Teilchen bewegt).

(a) Ist $V\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $V' = -f$ (ein so genanntes *Potential für* f), so zeigen Sie, dass durch $H\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x),$$

ein 1. Integral für (1) gegeben ist (vgl. Aufgabe-34).

(b) Im Falle des harmonischen Oszillators (vgl. Aufgabe-32) ist $f(x) = -kx$ (mit $k > 0$). Wählen Sie ein Potential für f und beschreiben Sie dann die Niveaulinien für das zugehörige 1. Integral H. Wie sieht die Dynamik des Systems auf den Niveaulinien $\{H = c\}$ (für $c \in \mathbb{R}$) aus? Beschreiben Sie qualitativ.

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Lösung

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{m} f(x)$$

auf $I \times \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass H entlang so einer Kurve konstant ist. Dazu differenzieren wir $t \mapsto H(x(t), \dot{x}(t))$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H(x(t), \dot{x}(t)) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + V(x(t))\right) \\
&= \frac{1}{2} m \cdot 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + V'(x(t))\dot{x}(t) \\
&= \dot{x}(t)(m\ddot{x}(t) + V'(x(t))) = (\dot{x}(m\ddot{x} - f(x)))\,(t) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Für $f(x) = -kx$ ($k > 0$) wählen wir $V\colon I \to \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, und erhalten das 1. Integral $H\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2} m y^2 + \frac{1}{2} k x^2.$$

Die Niveaulinien $\{H = c\}$ sind dannn offenbar Ellipsen für $c > 0$ mit den Hauptachsen $a = \sqrt{2c/k}$ und $b = \sqrt{2c/m}$:

$$H(x, y) = c \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für $c = 0$ bekommt man die einzige Gleichgewichtslage des Systems in $(x, y) = (0, 0)$,

$$H(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0,\; y = 0.$$

[Das ist ein krtischer Wert von H, $\partial H/\partial x = 0$, $\partial H/\partial y = 0$, so dass der implizite Funktionensatz nicht anwendbar ist (und man i.a. keine „Linie“ bekommt.] Für $c < 0$ ist $\{H = c\} = \emptyset$.

Da auf den Niveaulinien $\{H = c\}$ für $c > 0$ keine Gleichgewichtslagen liegen und sie zusammenhängend sind, bestehen diese aus einer einzigen Bahn, die also damit periodisch ist.

Aufgabe 42. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, $A \mapsto e^A$, die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion.

(a) Berechnen Sie e^{A_i} ($i = 1, 2$) für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{C}$:

$$\det e^A = e^{\mathrm{spur} A},$$

(Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die Spalten von $\Phi(t) = e^{tA}$ Lösungs-Fundamentalsystem von $\dot{z} = Az$ sind und Aufgabe-37.)

Lösungsvorschlag. (a) Um $\exp(A_i)$ $(i = 1, 2)$ zu berechnen, diagonalisieren wir zunächst A_i. Aus Aufgabe-39 wissen wir, dass

$$S^{-1}A_1S = \mathrm{diag}(-3, 1) =: D \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ist

$$\exp(A_1) = \exp(SDS^{-1}) = S\exp(D)s^{-1} = S \cdot \mathrm{diag}(e^{-3}, e) \cdot S^{-1}.$$

Das Inverse von S berechnen wir bei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Formel der Adjunkten von S, d.i.

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

also zu

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert

$$\begin{aligned} \exp(A_1) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3} & 3e \\ -e^{-3} & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3} + 3e & -3e^{-3} + 3e \\ -e^{-3} + e & 3e^{-3} + e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

So gehen wir auch bei A_2 vor, wobei wir hier einen Umweg über die komplexen Zahlen machen, da A_2 über $\mathbb{R}$ nicht diagnalisierbar ist. Es ist

$$S^{-1}A_2S = \mathrm{diag}(1 + i, 1 - i) =: D \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 - i & -1 + i \end{pmatrix}$$

(siehe Aufgabe-39). Das Inverse von S ist wegen

$$\det S = 2(-1 + i) - 2(-1 - i) = -2 + 2i + 2 + 2i = 4i :$$

$$S^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} -1 + i & -2 \\ 1 + i & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
\exp(A_2) &= \exp(SDS^{-1}) = S\exp(D)S^{-1} \\
= &\quad \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\
= &\quad \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2e^{1+i} & 2e^{1-i} \\ (-1-i)e^{1+i} & (-1+i)e^{1-i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\
= &\quad \frac{1}{4i}\begin{pmatrix} 2(-1+i)e^{1+i}+2(1+i)e^{1-i} & -4e^{1+i}+4e^{1-i} \\ (-1-i)(-1+i)e^{1+i}+(-1+i)(1+i)e^{1-i} & 2(1+i)e^{1+i}+2(-1+i)e^{1-i} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hier könnten wir nun schon aufhören. Da die Matrix noch nicht sonderlich reell aussieht, was sie aber sein muss, da $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ liegt, falls $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist, zerlegen wir nun noch die Einträge $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dieser Matrix in Real- und- Imaginärteil. Da der Vorfaktor $1/(4i)$ noch ins Spiel kommt, brauchen wir nur die Imaginärteile der vier Einträge. Die Realteile müssen Null sein, was eine Kontrollmöglichkeit dafür bietet, ob man sich verrechnet hat. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \mathrm{Im}\left(2(-1+i)e(\cos(1)+i\sin(1))+2(1+i)e(\cos(-1)+i\sin(-1))\right) \\
&= 2e(\cos(1)-\sin(1))+2e(\cos(1)-\sin(1)).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Einträge von $\exp(A_2)$ mit $b_{ij} \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i, j \leq 2)$, so erhalten wir also nach DIvision durch $4i$ den Eintrag

$$b_{11} = e(\cos(1)-\sin(1)).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left(-4e^{1+i}+4e^{1-i}\right) &= \mathrm{Im}\left(-4e(\cos(1)+i\sin(1))+4e(\cos(-1)+i\sin(-1))\right) \\
&= 4e(-\sin(1)-\sin(1)) = -8e\sin(1).
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$b_{12} = -2e\sin(1).$$

Und so geht es weiter:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left((-1-i)(-1+i)e^{1+i}+(-1+i)(1+i)e^{1-i}\right) \\
&\quad = \mathrm{Im}\left(2e(\cos(1)+i\sin(1))-2e(\cos(-1)+i\sin(-1))\right) \\
&\quad = 2e(\sin(1)+\sin(1)) = 4e\sin(1),
\end{aligned}$$

also

$$b_{21} = e\sin(1).$$

Und schließlich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}\left(2(1+i)e^{1+i}+2(-1+i)e^{1-i}\right) \\
&\quad = \mathrm{Im}\left((1+i)2e(\cos(1)+i\sin(1))+(-1+i)2e(\cos(-1)+i\sin(-1))\right) \\
&\quad = 2e(\cos(1)+\sin(1))+2e(\cos(1)+\sin(1)) \\
&\quad = 4e(\cos(1)+\sin(1)),
\end{aligned}$$

also

$$b_{22} = e(\cos(1)+\sin(1)).$$

Insgesamt (puh!) erhalten wir also:

$$e^{A_2} = e \begin{pmatrix} \cos(1) - \sin(1) & -\sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) + \sin(1) \end{pmatrix}$$

(ohne Gewähr).

(b) Da $\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, $t \mapsto e^{tA}$ Lösung von $\dot{\Phi} = A\Phi$ (mit $\Phi(0) = E_n$) ist, erfüllt nach Aufgabe-37 die Funktion $\Delta = \det \Phi$ die Gleichung

$$\dot{z} = \mathrm{spur}(A)z$$

auf $\mathbb{C}$ (mit $z(0) = 1$). Es ist also

$$z(t) = \exp(\mathrm{spur}(A)t).$$

Für $t = 1$ erhält man

$$\det(e^A) = z(1) = e^{\mathrm{spur}(A) \cdot 1} = e^{\mathrm{spur}(A)}.$$

(Insbesondere ergibt sich erneut: $e^A \in \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$.)