Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
19.12.2021
Blatt 12

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 43. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ die (komplexe Matrizen-) Exponentialfunktion.

(a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ an, so dass

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

und begründen Sie dies.

(b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist $e^\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\exp(A)$.

(c) Begründen Sie, warum $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist und es gilt:

$$D\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n\mathbb{C}}.$$

Lösungsvorschlag. **(a)** Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind nilpotent mit $A^2 = B^2 = 0$. Deshalb sind

$$\exp(A) = \mathbf{1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(B) = \mathbf{1} + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist

$$C := A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Spiegelung an der Winkelhalbierenden, da $E_1 \mapsto e_2$ und $e_2 \mapsto e_1$ gilt. Deshalb ist $(1,1)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und $(-1,1)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$$

transformiert daher C auf $D := \operatorname{diag}(1, -1)$: $S^{-1}CS = D$. Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist deshalb

$$\begin{aligned} \exp(C) &= S\exp(D)S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e+e^{-1} & e-e^{-1} \\ e-e^{-1} & e+e^{-1} \end{pmatrix} \neq \exp(A)\exp(B). \end{aligned}$$

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gibt es also ein $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Az = \lambda z$. Es folgt induktiv

$$A^k z = \lambda^k z,$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und daher

$$\exp(A)z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k\right) \cdot z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A^k z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\lambda^k z) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k\right) \cdot z = e^{\lambda} z.$$

z ist also auch Eigenvektor von $\exp(A)$, allerdings jetzt zum Eigenwert e^{λ}. Es ist also e^{λ} Eigenwert von $\exp(A)$.

(c) Die Partialsummen von $\exp(A)$ konvergieren auf jedem Kompaktum $K \subseteq \operatorname{Mat}_n\mathbb{C}$ gleichmäßig (und absolut) gegen $\exp(A)$. Denn da $\|\cdot\| \colon \operatorname{Mat}_n\mathbb{C} \to [0, \infty)$ stetig ist, gibt es eine obere Schranke $C > 0$ für $\|A\|$ auf K. Damit gilt für die Exponentialreihe $\exp(A)$ auf K, dass ihre zugehörige Reihe der Normen durch e^C beschränkt ist,

$$\sum_{n=0} \|\frac{1}{n!}A^n\| \leq e^{\|A\|} \leq e^C,$$

und nach dem Weierstraßschen M-Test konvergiert die Reihe daher auf K gleichmäßig und absolut. Da die Partialsummen Einträge haben, die Polynome in den Einträgen von A sind, sind diese stetig differenzierbar und daher ist der Limes nach einem weiteren Satz von Weierstraß ebenfalls stetig differenzierbar. Das gilt für jedes Kompaktum, also ist exp auf ganz $\operatorname{Mat}_n\mathbb{C}$ stetig differenzierbar (sogar komplex analytisch in mehreren Veränderlichen). Für das Differential im Nullpunkt

$$D\exp_0 \colon \operatorname{Mat}_n\mathbb{C} \to \operatorname{Mat}_n\mathbb{C}$$

berechnen wir die Richtungsableitung so:

$$D\exp_0(B) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(tB) = B\exp(tB)|_{t=0} = B \cdot \mathbf{1} = B,$$

also gilt:

$$D\exp_0 = \mathrm{id}.$$

[Anmerkung: Nach dem Umkehrsatz ist damit $\exp \colon \operatorname{Mat}_n\mathbb{C} \to \operatorname{GL}_n\mathbb{C}$ lokal um $A = 0 \in \operatorname{Mat}_n\mathbb{C}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $\mathbf{1} \in \operatorname{GL}_n\mathbb{C}$.]

Aufgabe 44. Die Bewegung eines Pendels (mit starrer Stange) unter dem Einfluss der Erdanziehung geschieht (nach Normierung einer Konstanten) durch Lösung der folgenden Differentialgleichung des „mathematischen Pendels“ auf $\mathbb{R}$:

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

(x beschreibt hier das Bogenmaß des Winkels der Auslenkung.)

(a) Geben Sie ein 1. Integral H auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$ der Gleichung an (vgl. Aufgabe-41).

(b) Diskutieren Sie nun die Niveaulinien $\{H = c\}$ ($c \in \mathbb{R}$) und die Bahnen, die auf ihnen liegen, qualitativ. Machen Sie eine Skizze des Phasendiagramms.

Lösungsvorschlag. **(a)** Ein Potential $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sin x$, ist offenbar durch

$$V(x) = -\cos x$$

gegeben, $V'(x) = \sin x = -f(x)$ (vgl. Aufgabe-41). Deshalb ist $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

ein 1. Integral für $\ddot{x} + \sin x = 0$.

(b) H ist offenbar nach unten beschränkt,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \geq 0 - 1 = -1,$$

und hat seine Minima in $x = 2k\pi$, $y = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$), welches der unteren Gleichgewichtslage des Pendels entspricht. (Eigentlich ist der Phasenraum $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, wenn man $x \in \mathbb{S}^1$ nimmt, weshalb wir eine Periodizität von 2π in x-Richtung des Phasendiagramms erwarten.) Für $c = -1$ besteht also $\{H = -1\}$ aus genau diesen Punkten,

$$\{H = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi, \ y = 0\}.$$

Für $-1 < c < 1$ lösen wir $H(x, y) = c$ nach y auf,

$$y = \pm 2\sqrt{\cos x + c}.$$

Das beschreibt konzentrische Ovale um die behandelten Gleichgewichtslagen herum. Auf diesen liegen keine kritischen Punkte von H, also keine Gleichgewichtslagen von

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x.$$

Deshalb besteht jedes dieser Ovale (eigentlich gibt es für jedes $c \in (-1, 1)$ nur eines, wenn man die oben erwähnte Periodizität beachtet) aus einer einzigen Bahn, welche damit periodisch ist. Das beschreibt die Pendelbewegung so kleiner „Energie“ H, dass es keinen Überschlag gibt.

Der Fall $c = 1$ ist speziell. Zum einen liegen hier die kritischen Punkte $x = (2k + 1)\pi$, $y = 0$ von H, welche die obere Gleichgewichtslage des Pendels beschreiben. Zum anderen liegen dort die Bahnen auf den Niveaulinien

$$y = \pm 2\sqrt{\cos x + 1} \quad (y \neq 0),$$

die von den kritischen Punkten $(2k-1)\pi$ zu $(2k+1)\pi$ (bei $y > 0$) bzw. von $(2k+1)\pi$ nach $(2k-1)\pi$ (bei $y < 0$) führen ($k \in \mathbb{Z}$). Bis auf die Periodizität sind das die beiden Bahnen, die die Bewegung des Pendels beschreiben, die man erhält, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit gerade so wählt, dass das Pendel (gerade so eben und in unendlicher Zeit) in die obere Gleichgewichtslage läuft (aber diese natürlich nie erreicht).

Für $c > 1$ dann schließlich ist man wieder in dem Bereich, wo es keine kritischen Punkte mehr gibt.

$$\{H = c\} \;\Leftrightarrow\; y = \pm 2\sqrt{\cos x + c}$$

besteht aus den beiden Komponenten

$$y = +2\sqrt{\cos x + c}, \quad y = -2\sqrt{\cos x + c},$$

die nicht mehr zusammenkommen. Man hat dort für festes $c \in (1, \infty)$ genau zwei Bahnen, die die Bewegung des Pendels beschreiben, bei der die Energie H groß genug ist, dass das Pendel sich „überschlägt". Diese beiden Bahnen wären im Phasendiagramm von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ auch geschlossen und beschreiben damit auch eine periodische Bewegung. [Anm.: Beachte, das wir hier keine Dämpfung berücksichtigt haben.]

Phasendiagramm:

Aufgabe 45. Seien $\omega, \omega_0, \gamma \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Differentialgleichung der „erzwungenen Schwingung" auf $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe-36)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t).$$

(a) Sei $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass sich $x(t)$ für große t immer mehr der erzwungenen Schwingung

$$y(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$$

(mit geeigneter *Amplitude* A und *Phasenverschiebung* α) annähert. (Hinweis: Lösen Sie die komplexe Gleichung mit rechter Seite $\exp(i\omega t)$ und gehen Sie dann zum Realteil über.)

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung im ungedämpften Fall ($\gamma = 0$) nun auch im Falle der Resonanz ($\omega = \omega_0$). (Hinweis: Ansatz: $x(t) = A \cdot t\exp(i\omega t)$.)

Lösungsvorschlag. (a) Wir versuchen eine spezielle Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\omega t}$$

auf $\mathbb{C}$ durch den Ansatz

$$z(t) = ce^{i\omega t}$$

zu gewinnen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= ci\omega e^{i\omega t} \\ \ddot{z}(t) &= -c\omega^2 e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

also

$$e^{i\omega t} = \ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = (-c\omega^2 + ci\gamma\omega + c\omega_0^2)e^{i\omega t},$$

was durch die Bedingung

$$c(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) = 1 \;\Leftrightarrow\; c = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

zu ereichen ist. Setzen wir nun

$$\alpha := \arctan\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

so ist

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = |\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega| \cdot e^{i\alpha},$$

also mit

$$A := \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2\right)^{-1/2} :$$

$$y(t) := \mathrm{Re}(z(t)) = A \cdot \mathrm{Re}(e^{i\omega t}e^{i(-\alpha)}) = A\mathrm{Re}(e^{i(\omega t - \alpha)} = A\cos(\omega t - \alpha).$$

spezielle Lösung von

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \mathrm{Re}(\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega_0^2 z) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

kennen wir bereits aus den Aufgaben 38 und 40. Sie ist bei $\Delta := 4\omega_0^2 - \gamma^2$:

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(-\frac{\gamma}{2}t)\cos(\sqrt{\Delta}t) + c_2 \cdot \exp(-\frac{\gamma}{2}t)\sin(\sqrt{\Delta}t)$$

im Schwingungsfall $\Delta > 0$,

$$x(t) = c_1 \cdot \exp(-\frac{\gamma}{2}t) + c_2 \cdot t\exp(-\frac{\gamma}{2}t)$$

im aperiodischen Grenzfall ($\Delta = 0$), und

$$x(t) = c_1 \cdot \exp((-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2})t) + c_2 \cdot \exp((-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2})t)$$

im Kriechfall $\Delta < 0$. Wegen $-\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2$ ist $\sqrt{-\Delta} < \gamma$ und daher in allen Fällen der Faktor vor dem t im Exponentialterm kleiner als Null. Deshalb gilt in allen Fällen

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

(Die Dämpfung zwingt die Feder schließlich in den Ruheszustand.) Für die inhomogene Gleichung folgt daher in der Tat, dass für die allgemeine Lösung

$$x(t) = A\cos(\omega t - \alpha) + c_1 \cdot (\cdots) + c_2 \cdot (\cdots)$$

stets

$$\lim_{t\to\infty}(x(t) - y(t)) = 0.$$

[Anm.: Unabhängig von den Anfangsbedingungen schwingt sich das System nach einer „Einschwingphase“ schließlich in die „erzwungene Schwingung“ $y(t)$ ein (d.h: sie nähert sich dieser immer mehr, sogar exponentiell schnell, an.]

(b) Die allgemeine Lösung der ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

kennen wir schon. Sie ist

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Für die allgemeine Lösung der ungedämpften erzwungenen Schwingung im Resonanzfall

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\omega t)$$

brauchen wir deshalb nur noch eine spezielle Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

$$z(t) = A \cdot t e^{i\omega t}$$

für eine spezielle Lösung der komplexen Gleichung

$$\ddot{z} + \omega^2 z = e^{i\omega t}$$

und rechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= A(e^{i\omega t} + i\omega t e^{i\omega t}) = A(1 + i\omega t)e^{i\omega t} \\
\ddot{z}(t) &= A(i\omega + (1 + i\omega t)i\omega)e^{i\omega t} = A(2i\omega - \omega^2 t)e^{i\omega t}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \left(A(2i\omega - \omega^2 t) + \omega^2 \cdot At\right) e^{i\omega t} = (2iA\omega)e^{i\omega t},$$

und das bekommen wir also zu $e^{i\omega t}$, wenn wir

$$A(\omega) = \frac{1}{2i\omega} = \frac{1}{2\omega} e^{-i\pi/2}$$

setzen. Übergang zum Realteil $y := \mathrm{Re}(z)$ führt dann auf die spezielle Lösung

$$y(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = \frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t),$$

denn

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \mathrm{Re}(\ddot{z} + \omega^2 z) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung im Resonanzfall ist daher

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

[Anm.: x wird also für $t \to \infty$ beliebig groß (in positiver wie in negativer Richtung), was man als „Resonanzkatastrophe“ bezeichnet.]

Aufgabe 46. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto e^A$, die reelle (Matrizen-) Exponentialfunktion und sei

$$\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} = \{S \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R} :\ \det S > 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ ist, für alle $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$.

(b Zeigen Sie, dass $S = \mathrm{diag}(-1,-4)) \in \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ nicht im Bild von exp liegt.

Lösungsvorschlag. (a) Die (stetige) Kurve $\alpha\colon [0,1] \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \exp(tA),$$

verbindet die Punkte $\alpha(0) = \mathbf{1}$ und $\alpha(1) = A$ in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$. Da $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \det(\alpha(t)),$$

stetig ist und nie Null und außerdem $f(0) = 1 > 0$, muss nach dem Zwischenwertsatz auch $f(1) > 0$ sein. Es folgt

$$\det(\exp(A)) > 0,$$

also $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$. Alternativ sieht man unmittelbar mit Aufgabe-42-b, dass

$$\det(\exp(A)) = e^{\mathrm{spur}(A)} > 0$$

ist.

[Anmerkung: $\mathrm{GL}_n\mathbb{R} \subseteq \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge, die aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, nämlich $\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ (die eine Untergruppe ist) und $\{S \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : \det S < 0\}$. Diese sind diffeomorph, weil die Multilikation mit einer festen Matrix negativer Determinante wegen des Determinaten-Multiplikationssatzes sie ineinander überführt.]

(b) Sei also $S = \mathrm{diag}(-1,-4)$. Wir nehmen an, dass es ein $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{R}$ mit $\exp(A) = S$ gibt. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Dann ist nach Aufgabe-43-b e^λ Eigenwert von S. Die beiden Eigenwerte von S sind aber beide negativ. Deshalb kann λ nicht reell sein. Da aber A reell ist, ist auch $\bar\lambda$ ein Eigenwert von A, denn ist $z \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor für λ, so ist $\bar z \in \mathbb{C}^2$ Eigenvektor zu $\bar\lambda$:

$$A\bar z = \bar A \bar z = \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \bar\lambda \bar z.$$

Da schließlich

$$|\exp(\bar\lambda)| = e^{\mathrm{Re}(\bar\lambda)} = e^{\mathrm{Re}(\lambda)} = |\exp(\lambda)|$$

ist, muss $e^{\bar\lambda} = e^\lambda$ sein, denn sie sind -1 oder -4. Es gibt also zwei linear unabhängige Vektoren z_1 und z_2 in $\mathbb{C}^2$ mit

$$Az_1 = \lambda z_1, \quad Az_2 = \bar\lambda z_2.$$

Aber z_1 und z_2 sind dann auch linear unabhängige Eigenvektoren von $S = \exp(A)$. zum Eigenwert $e^\lambda = e^{\bar\lambda}$. Der Eigenraum von -1 bzw. -4 von S ist nur 1-dimensional. Das kann also nicht sein. S liegt also nicht im Bild von $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_2^+\mathbb{R}$.

[Anmerkung: Beachte, dass im Bild von $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ durchaus Matrizen mit negativen Eigenwerten liegen. Z.B. liegt $S := -\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ im Bild, denn beispielsweise ist $A =$

$\begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$ ein Urbild, weil A die Eigenwerte $\pm i\pi$ hat und $D = \mathrm{diag}(i\pi, -i\pi)$ unter exp auf S geht. Dann aber auch jedes Konjuguerte von D, z.B. A, denn S vertauscht mit allen Matrizen aus $\mathrm{GL}_n\mathbb{C}$.]