Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
26.07.2021
Blatt 13

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ surjektiv ist.

Lösungsvorschlag. Sei $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$. Um zu zeigen, dass S im Bild von $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ liegt, reicht es wegen

$$\exp(TAT^{-1}) = T\exp(A)T^{-1}$$

(für alle $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ und $T \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$) zu zeigen, dass ein Konjugiertes von S im Bild von exp liegt.

1. Fall: S ist diagonalisierbar. Dann können wir also direkt annehmen, dass S selbst diagonal ist, $S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, da $\det S \neq 0$ ist. Da aber $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ surjektiv ist, ist dann $S = \exp(A)$ mit $A = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2)$, wenn wir $\mu_1 \in \exp^{-1}(\lambda_1)$ und $\mu_2 \in \exp^{-1}(\mu_2)$ wählen.

2. Fall: S ist nicht diagonalisierbar. Dann kann man S auf seine Jordansche Normalform konjugieren und wir können gleich annehmen, dass S selbst Jordanform hat, also

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Wir wählen wieder ein Urbild $\mu \in \mathbb{C}$ von λ unter exp, $e^\mu = \lambda$, und setzen

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = \mu\mathbf{1}_2 + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $[\mu\mathbf{1}_2, N] = 0$. Daher ist

$$\exp(A) = \exp(\mu\mathbf{1}_2)\exp(N).$$

Wegen $N^2 = 0$ ist $\exp(N) = \mathbf{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit kann man $\exp(A)$ aber auch auf $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ konjugieren, denn λ ist offenbar einziger Eigenwert von $\exp(A)$ und $\exp(A) \neq \lambda \mathbf{1}_2$. (Jedes Konjugierte von $\lambda\mathbf{1}_2$ ist selbst wieder $\lambda\mathbf{1}_2$.) Es folgt: Auch S ist im Bild von $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$.

Aufgabe 48. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, $y\colon I \to G$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ auf G sowie $A\colon I \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $A(t) = Df(y(t))$. Zeigen Sie: Zu jeder Lösung $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$ der in y linearisierten Gleichung $\dot{\xi} = A(t)\xi$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Variation von Lösungen (x_ε) von y, so dass ξ das Variationsvektorfeld von (x_ε) ist.

Lösungsvorschlag. Sei o.E. $0 \in I$. Wir setzen $y_0 := y(0) \in G$. Wir nehmen für die Aufgabe an, dass $I = (a, b)$ mit

$$a > t_-(y_0), \quad b < t_+(y_0)$$

ist. Dann wissen wir, dass für alle y aus einer offenen Umgebung von y_0 das Zeitintervall $I(y)$ auch $I = (a, b)$ enthält. Jetzt betrachten wir die geradlinige Kurve

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \to G, \quad s \mapsto y_0 + s\xi_0 =: y_s$$

mit $\xi_0 := \xi(0) \in \mathbb{R}^n$. (Das Vektorfeld $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$ ist ja vorgegeben.) Für $\varepsilon > 0$ klein genug liegt diese Kurve in G und wir dürfen auch annehmen, dass

$$t_-(y_s) < a, \quad t_+(y_s) > b$$

ist, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann setzen wir $x\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to G$,

$$x(s, t) = \varphi^t(y_s),$$

wo $\varphi\colon \Omega \to G$ das dynamische System zu $\dot{x} = f(x)$ sei. Mit f ist auch φ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung und damit x auch zweimal stetig differenzierbar. Für jedes feste $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist dann offenbar $x_s\colon I \to G$, $x_s(t) = x(s, t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ und wegen $x_0(0) = \varphi^0(y_0) = y_0$ muss $x_0 = y$ sein. $(x_s)_s$ ist also eine Variation von Lösungen um y. Für das Variationsvektorfeld $\eta\colon I \to \mathbb{R}^n$ von (x_s),

$$\eta(t) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} x(s, t),$$

ist nun einerseits η Lösung der linearisierten Gleichung

$$\dot{\xi} = A(t)\xi$$

auf $\mathbb{R}^n$, mit $A\colon I \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $A(t) = Df(y(t))$, und andererseits ist

$$\eta(0) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0} \varphi^0(y_s) = \frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}(y_0 + s\xi_0) = \xi_0.$$

Deshalb muss $\eta(t) = \xi(t)$, für alle $t \in I$ sein, also $\eta = \xi$.

[Anm.: Wenn $b = t_+(y_0)$ ist, kann man i.a. die Variation nur noch auf einer offenen Umgebung von $\{0\} \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ defnieren, die aber für $t \to b$ immer enger wird und kein gleichmäßiger Schlauch um $\{0\} \times I$ mehr ist.]

Aufgabe 49. Sei $r \in [1, \infty]$, f ein $\mathcal{C}^r$-Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $x\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Zeigen Sie, dass x eine $\mathcal{C}^{r+1}$-Abbildung ist.

Lösungsvorschlag. Wir können $r \in \mathbb{N}$ annehmen und machen Induktion über r.

$r = 1$. Falls $f \in \mathcal{C}^1(G, \mathbb{R}^n)$ ist und $x\colon I \to G$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$, so ist also

$$\dot{x} = f \circ x \tag{1}$$

und damit x zunächst mal stetig differenzierbar, denn $\dot{x}$ ist auch stetig, weil f und x es sind. Dann ist aber $f \circ x$ auch stetig differenzierbar, weil beide Faktoren es sind, also ist $\dot{x}$ stetig differenzierbar. Das zeigt, dass x eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung ist.

$r \to r+1$. Genau so können wir hier jetzt auch argumentieren. Ist nämlich nun nach Voraussetzung $f \in \mathcal{C}^{r+1}(G, \mathbb{R}^n)$ und ist $x\colon I \to G$ eine Lösung, so wissen wir nach Induktionsvoraussetzung schon, dass $x \in \mathcal{C}^{r+1}(I, G)$ ist, denn f ist ja dann auch $\mathcal{C}^r$-Abbildung. Gleichung (1) zeigt dann aber, dass auch $f \circ x \in \mathcal{C}^{r+1}(I, G)$ ist und damit $\dot{x} \in \mathcal{C}^{r+1}(I, G)$, d.i.: $x \in \mathcal{C}^{r+2}(I, G)$.