Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
02.08.2021
Blatt 14

Musterlösungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 50. (a) Wir betrachten noch einmal (vgl. Aufgabe-40) die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung ($\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0.y_0) = (0,0)$ ein Attraktor des Systems ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0, y_0) = (0,0)$ des „mathematischen Pendels"(vgl. Aufgabe-44)

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

stabil, aber kein Attraktor ist.

Lösungsvorschlag. (a) (i) Im Fall $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2 < 0$ (Kriechfall) ist die allgemeine Lösung (siehe Aufgabe-38)

$$x(t) = c_1 \exp((-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2})t) + c_2 \exp((-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2})t),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei die Anfangsbedingung $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in den Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden kann und sich z_0 und $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ gegenseitig durch die gegebenen Konstanten abschätzen lassen. Für die +-Stabilität reicht es also zu zeigen, dass sich $\|z(t)\|$ für alle $t \in [0, \infty)$ gegen $\|c\|$ nach oben abschätzen lässt (durch eine Konstante, die nur von den gegebenen Konstanten abhängt und nicht etwa von t). Berechnung von $\dot{x}(t)$ und von $x^2(t)+\dot{x}^2(t)$ zeigt aber nun, dass die Funktion $N\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$N(t) = \|(x(t), \dot{x}(t))\|^2$$

sogar monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, denn der Vorfaktor von t in den Exponentialtermen ist überall kleiner als Null. Es ist also $(x_0, y_0) = (0,0)$ +-stabil und

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), \dot{x}(t)) = (0,0).$$

Das heißt, dass (x_0, y_0) ein (sogar *globaler*) Attraktor ist.

(ii) Im Schwingungsfall $\Delta > 0$ ist nach Aufgabe-40 die allgemeine Lösung (für alle $t \in \mathbb{R}$)

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\sqrt{\Delta} t) + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\sqrt{\Delta} t).$$

Es folgt für $N\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $t \mapsto \|(x(t),\dot{x}(t))\|^2$, zwar i.a. nicht, dass N monoton fallend gegen 0 konvergiert (für $t \to \infty$), allerdings gilt eine Abschätzung

$$N(t) \le \alpha \|c\|^2 e^{-\gamma t},$$

mit einem $\alpha > 0$, welches nur von den vorgegebenen Konstanten abhängt. Das zeigt, dass auch hier $(x_0,y_0) = (0,0)$ $+$-stabil ist und

$$\lim_{t\to\infty} (x(t),\dot{x}(t)) = (0,0)$$

für alle Anfangslagen ist. Auch hier ist also (x_0,y_0) ein (globaler) Attraktor.

(iii) Im aperiodischen Grenzfall $\Delta = 0$ ist die allgemeine Lösung (siehe Aufgabe-40)

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

(für alle $t \in \mathbb{R}$). Auch hier mag die Norm N auf einem allerdings kompakten Intervall $[0,b]$ vielleicht steigen und ist dann aber durch eine Konstante mal dem Normquadrat der Anfangsbedingung nach oben beschränkt, wo die Konstante nur von den vorgegebenen Daten abhängt. Danach fällt sie dann monoton fallend gegen Null, ähnlich wie im Fall (i). Das zeigt, dass auch hier (x_0,y_0) ein (globaler) Attraktor ist.

(b) Die Bahnen $t \mapsto (x(t),\dot{x}(t))$, die in einer offenen Umgebung $B_\delta(o)$ von $(x_0,y_0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ starten ($\delta > 0$), sind alles *Ovale*, nämlich die Niveaulinien des 1. Integrals $\{H = c\}$ für $c \in (-1,0)$ (vgl. Aufgabe-44). Die sind kompakt und deshalb ist $N|\{H = c\}$ wieder nach oben beschränkt mit

$$N(t) \le \alpha \|c\|^2, \quad \forall t > 0,$$

mit einer Konstanten $\alpha > 0$, die unabhängig von allem ist. Das zeigt, dass (x_0,y_0) zwar $+$-stabil (ja sogar stabil) ist, aber kein Attraktor, da die Bahn ja auf diesen geschlossenen Kurven bleibt und periodisch ist und damit nicht nach (x_0,y_0) hineinläuft.

Aufgabe 51. Sei $\varphi\colon \Omega \to G$, $(t,x) \mapsto \varphi^t(x)$, ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir setzen für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$G_t := \{x \in G : \ t \in I(x)\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass $G_t \subseteq G$ offen ist, für alle $t \in \mathbb{R}$, und, dass für die Abbildung

$$\varphi^t\colon G_t \to G, \quad x \mapsto \varphi^t(x),$$

gilt: $\mathrm{im}(\varphi^t) = G_{-t}$ und $\varphi^t\colon G_t \to G_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi^0 = \mathrm{id}_G$ ist und für alle $s,t \in \mathbb{R}$ (dort, wo beide Seiten der Gleichung definiert sind) gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}.$$

(Man nennt die Familie von Diffeomorphismen $(\varphi^t)_{t\in\mathbb{R}}$ den *zu φ gehörenden Fluss auf G*.)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in G_t$, also $t \in I(x)$. Aus dem Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert wissen wir, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von x gibt, so dass $t \in I(y)$ ist, für alle $y \in U$. Es ist also $U \subseteq G_t$ und damit $G_t \subseteq G$ offen. Wegen $0 \in I(x)$, für alle $x \in G$, ist $G_0 = G$ und $\varphi^0 = \mathrm{id}_G$. Ist nun $x \in G_t$, also $t \in I(x)$, so wissen wir, dass $s \in I(\varphi^t(x))$ ist, genau wenn $t + s \in I(x)$ ist. Es folgt, dass $-t \in I(\varphi^t(x))$ ist, da $t + (-t) = 0 \in I(x)$ ist. Deshalb ist $\varphi^t(x) \in G_{-t}$. Zudem wissen wir, dass in dem Fall $s \in I(\varphi^t(x))$ gilt (siehe Aufgabe-31):

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Für unseren Fall $s = -t$ liefert das

$$\varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = \varphi^{-t+t}(x) = \varphi^0(x) = x = \mathrm{id}(x),$$

und die Anwendung auf $-t$ statt t liefert ebenso

$$\varphi^t(\varphi^{-t}(x)) = \mathrm{id}(x).$$

Es ist also $\varphi^t \colon G_t \to G_{-t}$ ein Diffeomorphismus mit Inversem

$$(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}.$$

(b) Wir wissen schon, dass $\varphi^0 = \mathrm{id}_G$ ist und dass für festes $t \in I(x)$ gilt:

$$s \in I(\varphi^t(x)) \;\Leftrightarrow\; s + t \in I(x),$$

und in diesem Fall

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Für alle $x \in G_t \cap (\varphi^t)^{-1}(G_s \cap G_{-t})$ ist also die linke Seite definiert und dann auch die rechte. (Beachte, dass das umgekehrt nicht so ist.) Es gilt also

$$\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t} \quad \text{auf } G_t \cap (\varphi^t)^{-1}(G_s \cap G_{-t}).$$

Und das für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 52. Berechnen Sie die charakteristischen Exponenten der Gleichgewichtslage $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ beim

(a) harmonischen Oszillator $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ $(\omega > 0)$;

(b) bei der gedämpften (harmonischen) Schwingung $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$ $(\omega > 0,\ \gamma > 0)$;

(c) beim mathematischen Pendel $\ddot{x} + \sin x = 0$;

(d) und bei der (oberen) Gleichgewichtslage $q = (\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$ des mathematischen Pendels.

Lösungsvorschlag. (a) Für den harmonischen Oszillator haben wir für das induzierte System $\dot{\xi} = A\xi$ auf $\mathbb{R}^2$, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\xi \mapsto A\xi$, ist natürlich $Df(0) = A$, und die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von

$$\chi_A(t) = t^2 + \omega^2.$$

Also sind die charakteristischen Exponenten $\lambda_{1/2} = \pm i\omega$.

(b) Im Falle der Dämpfung erhalten wir die charkterische Gleichung (bei $\gamma > 0$ und $\omega > 0$)

$$t^2 + \gamma t + \omega^2 = 0,$$

also als charakteristische Exponenten

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

mit $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$. Je nachdem, ob $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ oder $\Delta > 0$ ist, bekommt man zwei Exponenten auf $\mathbb{R}_-$ oder zwei nicht-reelle konjugiert komplexe Exponenten. Das Verhalten *verzweigt* bei $\Delta = 0$ in dem doppelten charakteristischen Exponenten $-\gamma/2$. (Immer ist $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, also ein Attraktor, was wir schon wissen.)

(c) Im Falle des mathematischen Pendels ist $\dot{\xi} = f(\xi)$ auf $\mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (y, -\sin x)$ für $\xi = (x, y)$. Es folgt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Exponenten sind (wie im Falle des harmonischen Oszillators bei $\omega = 1$, der seine Linearisierung im Nullpunkt darstellt) $\lambda_{1/2} = \pm i$.

(d) In der oberen (instabilen) Gleichgeweichtslage $(x, y) = (\pi, 0)$ ist dagegen

$$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit seinen beiden Eigenwerten ± 1. (Ein so genannter *hyperbolischer Punkt.)*