

Musterlösungen

zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker 4

Aufgabe 01. Wir betrachten die *Einheitskreislinie*

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

und \mathbb{C}^* als Gruppe bzgl. der multiplikativen Struktur der komplexen Zahlen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}^*$ das Inverse $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ durch $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gegeben ist und dann, dass $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ eine Untergruppe ist.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ nennt man $\omega \in \mathbb{S}^1$ eine *n. Einheitswurzel*, wenn gilt: $\omega^n = 1$. Bestimmen Sie alle *n. Einheitswurzeln* in Polarform $\omega = e^{i\varphi}$ (mit $\varphi \in [0, 2\pi)$) und zeigen Sie, dass $U_n := \{\omega \in \mathbb{S}^1 : \omega^n = 1\}$ eine Untergruppe von \mathbb{S}^1 ist. Machen Sie eine Skizze dieser *n. Einheitswurzeln*.

Lösungsvorschlag. (a) Aus der Definition des Betrages mit $|z|^2 = z\bar{z}$ folgt durch Division von $|z|^2 z$ auf beiden Seiten unmittelbar:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Für $z, w \in \mathbb{S}^1$ folgt wegen der Multiplikativität des Betrages

$$|zw| = |z| \cdot |w| = 1 \cdot 1 = 1,$$

also ist auch $zw \in \mathbb{S}^1$. Und mit $z \in \mathbb{S}^1$ ist wegen

$$|z^{-1}| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2} = |\bar{z}| = |z| = 1,$$

also ist auch $z^{-1} \in \mathbb{S}^1$. Das zeigt, dass (\mathbb{S}^1, \cdot) eine Untergruppe von (\mathbb{C}^*, \cdot) ist.

(b) Jedes $\omega \in \mathbb{C}^*$ kann man mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig in Polarform $\omega = re^{i\varphi}$ schreiben. Die Bedingung $\omega \in \mathbb{S}^1$ bedeutet dann gerade, dass $r = 1$ ist, denn $r = |\omega|$. Nun ist

$$e^{i \cdot 0} = 1 = \omega^n = (e^{i\varphi})^n = e^{ni\varphi}$$

nach der Funktionalgleichung der e-Funktion (auch im Komplexen). Es muss deshalb für $\omega \in U_n$ gelten:

$$n\varphi \equiv 0 \pmod{2\pi},$$

d.h.: $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Das ist für $\varphi \in [0, 2\pi)$ genau dann der Fall, wenn

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{k}{n} \quad (k = 0, \dots, n-1)$$

ist. Setzen wir $\omega_0 := e^{\frac{2\pi i}{n}}$, so sind also die Lösungen von $\omega^n = 1$ durch

$$\omega_0, \omega_0^2, \dots, \omega_0^{n-1}, \omega_0^n = 1$$

gegeben. Das ist eine Untergruppe, weil

$$\omega_0^k \cdot \omega_0^l = \omega_0^{k+l},$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}$ ist und deshalb $\omega_0^{n+k} = \omega_0^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

[Anmerkung: Die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow U_n, k \mapsto \omega_0^k$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus und hat Kern $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$. Nach dem Homomorphiesatz ist daher $U_n \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, also die *zyklische Gruppe der Ordnung n*.]

Die Elemente von $U_n \subseteq \mathbb{S}^1$ bilden also ein regelmäßiges n -Eck (mit Umkreis \mathbb{S}^1) und $1 \in \mathbb{S}^1$ gehört dazu. (Skizze)

Aufgabe 02. (a) (Abelsches Lemma) Sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine formale komplexe Potenzreihe (d.i.: $a_n \in \mathbb{C}$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$), die in einem $z_0 \in \mathbb{C}^*$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ gilt: $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert absolut. (Hinweis: Majorisieren Sie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ mit einer geometrischen Reihe.)

(b) Den *Konvergenzradius* $R_P \in [0, \infty]$ einer formalen Potenzreihe $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ kann man so definieren:

$$R_P := \sup\{r \in [0, \infty) : \text{es gibt ein } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r, \text{ so dass } P(z) = \sum_n a_n z^n \text{ konvergiert}\}$$

$\in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

- (i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R_P$ konvergiert $P(z)$ absolut;
- (ii) für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R_P$ divergiert $P(z)$.

Lösungsvorschlag. (a) Ist P in z_0 konvergent, so müssen die Summanden $a_n z_0^n$ der Reihe $P(z_0)$ beschränkt sein (sogar eine Nullfolge). Sei daher $M > 0$ so, dass $|a_n z_0^n| \leq M$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ beliebig, so ist $\theta := \frac{|z|}{|z_0|} < 1$ und es ist

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z_0|^n \cdot \frac{|z|^n}{|z_0|^n} = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \theta^n,$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es folgt, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n = M \frac{1}{1-\theta} < \infty$$

ist und damit $\sum_n a_n z^n = P(z)$ absolut konvergent.

[Anmerkung: Erinnern Sie sich, dass absolute Konvergenz immer Konvergenz der Reihe nach sich zieht, weil die Partialsummen der Reihe dann eine Cauchy-Folge bilden und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ vollständig ist,

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k - \sum_{k=0}^m a_k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon,$$

für m, n ($m \leq n$) groß genug.]

(b) (i) Sei $R = R_P \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius von P und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Es gibt nach Definition des Supremums ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0| < R$, so dass P in z_0 konvergiert. Nach Abels Lemma (Teil (a)) konvergiert dann P auch in z (und dort sogar absolut).

(ii) Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$, so kann nach Definition von R die Reihe P in z nicht konvergieren, divergiert dort also.

Aufgabe 03. Wir betrachten die Einbettung $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (x, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass es keine Multiplikation $*$ auf \mathbb{R}^3 gibt, die $(\mathbb{R}^3, +, *)$ zu einem Körper macht und mit der Vektorraumstruktur von $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ verträglich ist, d.h.: $x \cdot v = \tau(x) * v$, für alle $x \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^3$. (Hinweis: Betrachten Sie für jedes $v \in \mathbb{R}^3$ die \mathbb{R} -lineare Abbildung $L_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, w \mapsto v * w$, und benutzen Sie, dass jedes reelle Polynom 3. Grades eine reelle Nullstelle besitzt.)

Lösungsvorschlag. Ist $*$ eine innere Multiplikation auf \mathbb{R}^3 , welche mit $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ als Vektorraum verträglich ist, so ist jede Linksmultiplikation mit einem Element $v \in \mathbb{R}^3$,

$$L_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, L_v(w) = v * w,$$

\mathbb{R} -linear, denn für alle $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ ist

$$L_v(w_1 + w_2) = v * (w_1 + w_2) = v * w_1 + v * w_2 = L_v(w_1) + L_v(w_2)$$

nach dem Distributivgesetz, wenn $(\mathbb{R}^3, +, *)$ ein Körper ist, und für alle $x \in \mathbb{R}$ und $w \in \mathbb{R}^3$ ist

$$L_v(x \cdot w) = v * (x \cdot w) = v * \tau(x) * w = \tau(x) * v * w = x \cdot (v * w) = x \cdot L_v(w)$$

nach dem Kommutativgesetz für $*$. Das charakteristische Polynom von L_v ist ein reelles Polynom vom Grad 3 und hat deshalb eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ (was man leicht aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen sieht). Es ist λ daher ein Eigenwert von L_v , d.h.: es gibt ein $w_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$L_v(w_0) = \lambda w_0.$$

Das zeigt also

$$\tau(\lambda) * w_0 = \lambda \cdot w_0 = L_v(w_0) = v * w_0$$

oder

$$(v - \tau(\lambda)) * w_0 = v * w_0 - \tau(\lambda) * w_0 = 0.$$

Aber ein Körper ist nullteilerfrei und $w_0 \neq 0$, woraus $v - \tau(\lambda) = 0$ oder $v = \tau(\lambda)$ folgt. Aber wenn wir $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{im}(\tau)$ wählen, z.B. $v = (0, 1, 0)$, erhalten wir so einen Widerspruch. Solch eine Multiplikation $*$ kann es also nicht geben (allgemein auf \mathbb{R}^n mit n ungerade (und $n \neq 1$) mit diesem Argument. [Anm.: Kein \mathbb{R}^n (mit $n \neq 1$ und $n \neq 2$) trägt eine solche Körperstruktur.]

Aufgabe 04. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ reell-differenzierbar in $a \in G$. Begründen Sie, warum auch $\bar{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(z)}$, in a reell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}.$$

Lösungsvorschlag. Da $\text{conj}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, reell-differenzierbar ist, ist mit $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ auch $\bar{f} = \text{conj} \circ f$ reell differenzierbar. Ist $f = u + iv$, so ist $\bar{f} = u - iv$ und weil die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ auf vektorwertigen Funktionen komponentenweise wirken, haben wir zunächst einmal (immer im Punkt $a \in G$):

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \overline{\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Das zeigt nun, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}} - i \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} \right) \\ &= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit $\bar{\bar{f}} = f$ auch

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial (\bar{f})}{\partial z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Aufgabe 05. Seien $D, G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, $f: D \rightarrow G \subseteq \mathbb{C}$ in $a \in D$ reell-differenzierbar und $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ in $b = f(a)$ reell-differenzierbar. Begründen Sie, warum $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in a reell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(a) &= \frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a), \\ \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}(a) &= \frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a). \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag. Da f in a reell-differenzierbar und g in b reell-differenzierbar sind, ist nach der Kettenregel auch $g \circ f$ in a reell-differenzierbar und es gilt:

$$D(g \circ f)(a) = Dg(b)Df(a).$$

Im Wirtinger-Kalkül gilt für $Dg(b): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und einem Vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in komplexer Schreibweise $z = x + iy$

$$Dg(b)z = \frac{\partial g}{\partial w}(b)z + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b)\bar{z}.$$

Das zusammen ergibt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(a) - i \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y}(a) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(Dg(b) \frac{\partial f}{\partial x}(a) - i Dg(b) \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \overline{\frac{\partial f}{\partial x}(a)} \right) - i \left(\frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \overline{\frac{\partial f}{\partial y}(a)} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial g}{\partial w}(b) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right) \right] + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \left[\frac{1}{2} \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial x}(a)} - i \overline{\frac{\partial f}{\partial y}(a)} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a).
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann auch mit $\overline{g \circ f} = \bar{g} \circ f$ und noch einmal Aufgabe 04:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}}(a) &= \overline{\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(a)} = \overline{\frac{\partial \bar{g}}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{w}}(b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a)} \\
 &= \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b) \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial w}(b) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a).
 \end{aligned}$$

Aufgabe 06. (a) Stellen Sie eine Produktregel für reell-differenzierbare Funktionen $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) im Wirtinger-Kalkül auf und begründen Sie sie.

(b) Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden reell-differenzierbaren Funktionen $f_j: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, \dots, 4$) und bestimmen Sie, wo diese komplex-differenzierbar sind:

$$f_1(z) = \bar{z}, \quad f_2(z) = |z|^2, \quad f_3(z) = \operatorname{Re}(z), \quad f_4(z) = 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2.$$

Lösungsvorschlag. (a) Auch für komplexwertige reell-differenzierbare Funktionen $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ gilt die Leibnizregel in der folgenden Form: Auch $fg: G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)g(z)$, ist reell-differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(fg)}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z}g + f \frac{\partial g}{\partial z}, \\
 \frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}g + f \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}.
 \end{aligned}$$

Denn zunächst erfüllen die partiellen Ableitungsoperatoren $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial y$ die Leibnizregel, da sie ja auf die Differentiation von Funktionen in einer Variablen zurückgeführt werden. Deshalb ist nun für komplexwertige $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ und $g = \sigma + i\tau$ zunächst einmal

$$f \cdot g = (u\sigma - v\tau) + i(u\tau + v\sigma)$$

und daher (an jeder Stelle, wo f und g reell differenzierbar sind)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(fg)}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(fg)}{\partial x} - i \frac{\partial(fg)}{\partial y} \right) \\
 &= \dots = \frac{\partial f}{\partial z}g + f \frac{\partial g}{\partial z}
 \end{aligned}$$

nach Aufsummieren von 16 Summanden und analog

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial\bar{z}}g + f\frac{\partial g}{\partial\bar{z}}.$$

Insbesondere ist für den Fall, dass f und g holomorph sind, auch fg holomorph und es gilt:

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(b) Zunächst ist $f_1(z) = x - iy$ und daher

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial(x - iy)}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(x - iy)}{\partial x} - i \frac{\partial(x - iy)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0,$$

und ähnlich

$$\frac{\partial f_1}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}(1 - i^2) = 1,$$

also ist f_1 nirgendwo komplex-differenzierbar. Mit der Produktregel aus Teil (a) ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial(z\bar{z})}{\partial z} = \frac{\partial z}{\partial z}\bar{z} + z\frac{\partial\bar{z}}{\partial z} = 1 \cdot \bar{z} + z \cdot 0 = \bar{z}$$

und genauso

$$\frac{\partial f_2}{\partial\bar{z}} = z.$$

Damit ist f_2 nur in $z = 0$ komplex differenzierbar. Wegen $f_3(z) = \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ ist

$$\frac{\partial f_3}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial\bar{z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2}$$

und ebenso

$$\frac{\partial f_3}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}.$$

Also ist f_3 nirgendwo komplex-differenzierbar. Schließlich rechnen wir für f_4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_4}{\partial z} &= 4z\bar{z} - \bar{z}^2, \\ \frac{\partial f_4}{\partial\bar{z}} &= 2z^2 - 2z\bar{z} = 2z(z - \bar{z}). \end{aligned}$$

Letzteres ist gleich 0 offenbar genau wenn $z = \bar{z}$ ist, also für $z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 07. (a) Integrieren Sie $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, über den Weg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + e^{it}$.

(b) Parametrisieren Sie die geradlinige Verbindungsstrecke von $-1 \in \mathbb{C}$ nach $1 \in \mathbb{C}$ mit einem Weg γ_1 und betrachten Sie mit $\gamma_2: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i(\pi-t)}$ einen weiteren Weg von -1 nach 1 . Integrieren Sie nun die stetige Funktion $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = |z|$, über die Wege γ_1 und γ_2 .

(c) Zeigen Sie, dass $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = \operatorname{Re}(z)$, keine Stammfunktion hat.

Lösungsvorschlag. (a) Für $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ ist $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$. Es folgt

$$\gamma(t)^2 \dot{\gamma}(t) = (1 + e^{it})^2 ie^{it} = (1 + 2e^{it} + e^{2it})ie^{it} = i(e^{it} + 2e^{2it} + e^{3it}).$$

Damit wird

$$\int_{\gamma} z^2 dz = [e^{it} + e^{2it} + \frac{1}{3}e^{3it}]_0^{2\pi} = 0.$$

(Oder wir argumentieren so: Die Funktion $z \mapsto z^2$ ist auf der Kreisscheibe $B := B_2(1) \subseteq \mathbb{C}$ holomorph und γ ist ein geschlossener Weg in B . Deshalb muss $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ sein.)

(b) Für $\gamma_1: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_1(t) = t$ ist $\dot{\gamma}_1(t) = 1$ und daher

$$\int_{\gamma_1} g(z) dz = \int_{-1}^1 |t| \cdot 1 dt = 2 \int_0^1 t dt = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Für $\gamma_2: [0, \pi]$, $\gamma_2(t) = e^{i(\pi-t)}$, ist $\dot{\gamma}(t) = -ie^{i(\pi-t)}$ und daher

$$\int_{\gamma_2} g(z) dz = \int_0^{\pi} |e^{i(\pi-t)}| (-i)e^{i(\pi-t)} dt = [e^{i(\pi-t)}]_0^{\pi} = e^{i0} - e^{i\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

(c) Für den Kreisweg $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, ist $\dot{\gamma}(t) = ie^{it}$, so dass wir rechnen können:

$$h(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \operatorname{Re}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})ie^{it} = \frac{i}{2}(e^{2it} + 1).$$

Damit ist

$$\int_{\gamma} h(z) dz = \frac{i}{2} [\frac{1}{2i} e^{2it} + t]_0^{2\pi} = \frac{i}{2} 2\pi = i\pi \neq 0.$$

Damit kann h keine Stammfunktion haben.

Aufgabe 08. (Lemma von Goursat für Dreiecke). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\Delta \subseteq G$ ein (abgeschlossenes) Dreieck in G . Zeigen Sie: Ist $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$. (Hinweis: Gehen Sie so vor wie in der Vorlesung für Rechtecke.)

Lösungsvorschlag. Man geht genau so vor wie bei den Rechtecken in der Vorlesung. Durch Verbinden der drei Seitenmittelpunkte erhält man vier Teildreiecke $\Delta_1^{(1)}, \dots, \Delta_4^{(1)}$ und kann dann das Kurvenintegral über $\partial\Delta$ von f als Summe über die Kurvenintegrale über $\Delta_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, 4$) schreiben. Dann wählt man eines der vier Dreiecke aus — und nennt es Δ_1 —, bei dem der Betrag über das Kurvenintegral maximal ist. Dadurch erhält man:

$$|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4 |\int_{\partial\Delta_1} f(z) dz|, \quad L[\partial\Delta_1] = \frac{1}{2} L[\partial\Delta].$$

Diesen Prozess iteriert man und erhält so eine Schachtelung von Dreiecken $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$|\int_{\partial\Delta} f(z) dz| \leq 4^n |\int_{\partial\Delta_n} f(z) dz|, \quad L[\partial\Delta_n] = 2^{-n} L[\partial\Delta].$$

Nach dem Schachtelungsprinzip gibt es ein $a \in G$ mit

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n = \{a\}.$$

Ab hier schließt man mit der komplexen Differenzierbarkeit von f in a genau so wie in der Vorlesung, um zu sehen, dass für große n der Betrag von $\int_{\partial\Delta} f(z) dz$ beliebig klein wird.

Aufgabe 09. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. eines Punktes $a \in G$ (d.h.: für jedes $z \in G$ ist der geradlinige Weg $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)a + tz$, ganz in G). Sei weiter $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und derart, dass für alle Dreiecke $\Delta \subseteq G$ gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$. Zeigen Sie, dass dann durch $F: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta,$$

eine Stammfunktion von f gegeben ist.

(b) Zeigen Sie nun (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete): Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G : $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Lösungsvorschlag. (a) Auch hier kann man wie in der Vorlesung bei dem Beweis des Satzes vorgehen, dass eine stetige Funktion, bei der alle Wegintegrale über geschlossene Kurven verschwinden, eine Stammfunktion hat: Ist $z \in G$ beliebig und $h \in \mathbb{C}$ so klein, dass $z + th \in G$ liegt, für alle $t \in [0, 1]$, so liegt das Dreieck Δ mit den Eckpunkten a , z und $z + h$ ganz in G . Da nach Voraussetzung $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ ist, kann man die Differenz $F(z + h) - F(z)$ als Integral über den (kurzen) geradlinigen Weg $\gamma_h: [0, 1] \rightarrow G$, $t \mapsto z + th$, schreiben:

$$F(z + h) - F(z) = \int_{\gamma_h} f(\zeta) d\zeta.$$

Dann geht man wieder wie in der Vorlesung vor, um zu sehen, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z + h) - F(z)}{h} = f(z)$$

ist.

(b) Ist nun $G \subseteq \mathbb{C}$ sternförmig und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so gilt nach Aufgabe 08 zunächst, dass $\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$ ist, für alle abgeschlossenen Dreiecke $\Delta \subseteq G$. Mit Aufgabe-09-a hat dann f eine Stammfunktion. Dann muss aber

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

für jeden geschlossenen Weg γ in G sein.

Aufgabe 10. Sei $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(z) > 0\}$ und γ_z für jedes $z \in G$ der geradlinige Weg von 1 nach z in G . Wir nennen dann $\log: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\log(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

den *Hauptzweig des Logarithmus*.

(a) Zeigen Sie, dass \log ein Zweig des Logarithmus ist, d.h.: Für alle $z \in G$ ist $\exp \circ \log(z) = z$.

(b) Für jedes $z \in G$ sei $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ der Winkel in $(-\pi, \pi)$, so dass $z = |z|e^{i\arg(z)}$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $z \in G$ gilt:

$$\log(z) = \ln |z| + i\arg(z).$$

(Hinweis: Ersetzen Sie in der Definition den Weg γ_z durch den stückweise glatten Weg, der zunächst geradlinig von 1 nach $|z|$ läuft und dann auf dem Kreisbogen vom Radius $r = |z|$ von $|z|$ zu z (auf dem kürzesten Weg) und benutzen Sie Aufgabe 2b.)

(c) Geben Sie zwei Zahlen z_1, z_2 in G an, so dass auch $z_1 z_2$ in G ist und gilt:

$$\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2).$$

Lösungsvorschlag. (a) Nach Aufgabe-09-a ist $\log: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$,

$$\log'(z) = \frac{1}{z}.$$

Nach der Kettenregel ist mit $\exp' = \exp$ (siehe auch Aufgabe-11):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{\exp \circ \log(z)}{z} \right) &= \frac{1}{z^2} ((\exp' \circ \log(z)) \log'(z) \cdot z) - (\exp \circ \log(z) \cdot 1) \\ &= \frac{1}{z^2} (\exp \circ \log(z) - \exp \circ \log(z)) = 0 \end{aligned}$$

und nach Definition ist $\log(1) = 0$, also $\exp \circ \log(1) = e^0 = 1$. Damit ist

$$\frac{\exp \circ \log(z)}{z} = 1,$$

für alle $z \in G$. [Anmerkung: Eine holomorphe Funktion f auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, deren Ableitung verschwindet, $f' = 0$, muss konstant sein, $f = \text{const.}$, denn da sowohl $\partial f / \partial z = 0$ als auch $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ ist, verschwindet die Ableitung von f als reell-differenzierbare Funktion überall, $Df = 0$. Aber dann wissen wir aus der Theorie für mehrere reelle Veränderliche (mit dem Mittelwertsatz), dass f konstant sein muss.] Es ist also \log damit ein Zweig des Logarithmus.

(b) Sei $\sigma_z: [0, 1] \rightarrow G$,

$$\sigma_z(t) = (1-t) \cdot 1 + t|z| = 1 + t(|z| - 1),$$

und $\tau_z: [0, 1] \rightarrow G$,

$$\tau_z(t) = |z| e^{i \arg(z)t}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \int_0^1 \frac{|z| - 1}{1 + t(|z| - 1)} dt = [\ln(1 + t(|z| - 1))]_0^1 \\ &= \ln(1 + |z| - 1) - \ln(1) = \ln |z| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\tau_z} \frac{d\zeta}{\zeta} &= \int_0^1 \frac{|z| \cdot i \arg(z) e^{i \arg(z)t}}{|z| e^{i \arg(z)t}} dt \\ &= i \arg(z). \end{aligned}$$

Da $\sigma_z \star \tau_z \star \gamma_z^-$ geschlossen ist, folgt

$$\log(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{\sigma_z} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\tau_z} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln |z| + i \arg(z).$$

(c) Sei z.B.

$$z_1 := z_2 := e^{\frac{3}{4}\pi i} \in G.$$

Dann ist $z_1 \cdot z_2 = \exp(\frac{6}{4}\pi i) = -i$, also auch in G . Es folgt dann einerseits

$$\log(z_1) = \log(z_2) = \frac{3}{4}\pi i,$$

also

$$\log(z_1) + \log(z_2) = i \cdot \frac{6}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi i,$$

und andererseits

$$\log(z_1 z_2) = \log(-i) = -\frac{1}{2}\pi i.$$

Aufgabe 11. Wir definieren $\cos, \sin: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

und nennen diese Funktionen den *komplexen Cosinus* und den *komplexen Sinus*.

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz \mathbb{C} konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen $D = \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\}$ von \cos und setzen Sie $\tan: \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$. zeigen Sie dann, dass \cos , \sin und \tan holomorph sind mit

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos, \quad \tan' = 1 + \tan^2.$$

(Hinweis: Benutzen Sie, dass $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$ und $\exp' = \exp$ ist.)

Lösungsvorschlag. (a) Die Konvergenzradien der Cosinus- und der Sinusreihe sind jeweils $R = \infty$, da die reellen Reihen für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergieren. Nach Aufgabe-02 konvergieren sie dann auch für alle $z \in \mathbb{C}$, sogar absolut.

(b) (i) Wir rechnen mit der komplexen Exponentialreihe $\exp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n$:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (iz)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (iz)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (i^2)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} i^{2n+1} z^{2n+1}, \end{aligned}$$

und das ist wegen $(i^2)^n = (-1)^n$ und $i^{2n+1} = i(-1)^n$ gleich:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \cos z + i \sin z.$$

Die Umsummierung erst über die Summanden mit geradem n und dann mit ungeradem n kann man aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_n \frac{1}{n!} (iz)^n$ und dem großen Umordnungssatz (vgl. Analysis-3, Aufgabe-02) vornehmen.

(ii) Wegen $\cos(-z) = \cos z$, für alle $z \in \mathbb{C}$, weil die Potenzreihe nur von Null verschiedene Koeffizienten bei geraden Potenzen von z hat, und $\sin(-z) = -\sin z$, für alle $z \in \mathbb{C}$, aus ähnlichen Gründen, sehen wir aus

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z \end{aligned}$$

dass

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z, \quad \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z$$

ist.

(iii) Schließlich sieht man aus der Funktionalgleichung $e^{z+w} = e^z e^w$, für alle $z, w \in \mathbb{C}$, dass wegen $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})^2 - \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})^2 \\ &= \frac{1}{4}((e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})) = 1 \end{aligned}$$

ist.

Man beachte, dass all diese Formeln nicht nur für reelle $z = x \in \mathbb{R}$ gelten (wo man sie vielleicht schon kennt), sondern sogar für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) [Vorbemerkung: Vielleicht zunächst einige Anmerkungen dazu, warum der Hinweis gilt. Später, wenn die Theorie der holomorphen Funktionen noch etwas weiter entwickelt ist, werden wir sehen, dass Funktionen auf Kreisscheiben, die durch konvergente Potenzreihen gegeben sind wie die Exponentialfunktion, dort auch holomorph sind und man sie summandenweise differenzieren darf. Hier, wo das noch nicht zur Verfügung steht, kann man die Holomorphie der komplexen Exponentialfunktion auch durch die Aufteilung in Real- und Imaginärteil einsehen. Wegen der Eulerschen Gleichung, die man wie oben deren Verallgemeinerung direkt aus den Potenzreihendarstellungen von \exp , \cos und \sin bekommt,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, sieht man dass für $z = x + iy$ gilt:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x \cos(y) + i(e^x \sin y),$$

wobei wir die Funktionalgleichung für \exp benutzt haben (die man tatsächlich z.B. durch das Cauchy-Produkt von absolut konvergenten Reihen erhalten kann). Aus dieser Darstellung sieht man nun, dass z.B. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten, weil

$$\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z, \quad \frac{\partial e^z}{\partial y} = i e^z$$

ist und damit

$$\frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z.$$

Daran sieht man einerseits, dass \exp holomorph und andererseits, dass $\exp' = \exp$ ist. Außerdem sieht man an der Darstellung, dass das Bild von \exp ganz \mathbb{C}^* ist (die Null wird nicht getroffen), aber dass \exp nicht injektiv ist, sondern, dass

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}$$

ist, was wegen der Funktionalgleichung dazu führt, dass

$$e^z = e^w \Leftrightarrow z = w + 2\pi i \cdot k,$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ sein muss. Denn aus

$$e^x \cos(y) = 1, \quad e^x \sin(y) = 0$$

folgt wegen $\sin(y) = 0$ zunächst, dass $y \in \mathbb{Z}\pi$ ist, aber für die ungeraden Vielfachen $y = (2k+1)\pi$ (für $k \in \mathbb{Z}$) ist $\cos(y) = -1$ und die erste Gleichung ist wegen $e^x > 0$ nicht mehr zu erfüllen. Also muss $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ sein und dann wegen $\cos(y) = 1$ und daraus $e^x = 1$ schließlich auch $x = 0$. Das zeigt

$$e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i\mathbb{Z}.]$$

Daraus können wir nun alle Nullstellen des komplexen Cosinus berechnen. Es sind dies nur die schon im Reellen bekannten:

$$0 = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{e^{-iz}}{2}(e^{2iz} + 1).$$

Weil e^{-iz} nie Null ist, führt das auf

$$e^{2iz} = -1 = e^{-i\pi} \Leftrightarrow e^{i(2z+\pi)} = 1.$$

Das geht genau dann, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $2z + \pi = 2k\pi$, also wenn $z = \frac{1}{2}(2k - 1)\pi$ ist. Das sind genau die Nullstellen des reellen Cosinus. Aus den obigen Darstellungen von Cosinus und Sinus sieht man jetzt unmittelbar, dass \cos und \sin holomorph sind und es gilt:

$$\begin{aligned} \cos' z &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz}(e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) \\ &= \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(-e^{iz} + e^{-iz}) = -\sin z; \\ \sin' z &= \frac{1}{2i} \frac{d}{dz}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(ie^{iz} + ie^{-iz}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z. \end{aligned}$$

Auch der komplexe Tangens ist als Quotient zweier holomorpher Funktionen holomorph und nach der Quotientenregel ist

$$\begin{aligned} \tan' z &= \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin z}{\cos z} \right) = \frac{\cos^2 z - \sin z(-\sin z)}{\cos^2 z} \\ &= 1 + \frac{\sin^2 z}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z. \end{aligned}$$

Aufgabe 12. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie dass $u := \operatorname{Re}(f): G \rightarrow \mathbb{R}$ und $v := \operatorname{Im}(f): G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch sind. (v heißt dann *konjugiert harmonisch* zu u .)

(b) Sei nun $G \subseteq \mathbb{C}$ sogar sternförmiges Gebiet und $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, $\Delta u = 0$. Zeigen Sie, dass es ein holomorphes $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\operatorname{Re}(f) = u$. (Hinweis: Betrachten Sie $g: G \rightarrow \mathbb{C}$, $g = \partial_x u - i\partial_y u$.)

Lösungsvorschlag. (a) Für eine zweimal stetig differenzierbare (komplexwertige) Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) ist wegen des Satzes von Schwarz

$$4\partial_{z\bar{z}}^2 f = (\partial_x - i\partial_y)(\partial_x + i\partial_y)(f) = (\partial_{xx}^2 + i\partial_{xy}^2 - i\partial_{yx}^2 - \partial_{yy}^2)(f) = \Delta f.$$

Daher ist eine holomorphe Funktion f (wegen $\partial_{\bar{z}} f = 0$) dann insbesondere harmonisch, $\Delta f = 0$, und damit für $f = u + iv$ wegen $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ auch ihr Realteil u und ihr Imaginärteil v .

(b) Sei nun G sternförmig und $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch, d.h.: u ist zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u = 0$. Wir setzen dann $g: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g = \partial_x u - i\partial_y u$$

und rechnen:

$$2g_{\bar{z}} = \partial_x g + i\partial_y g = \partial_{xx}^2 u - i\partial_{xy}^2 u + i(\partial_{yx}^2 u - \partial_{yy}^2 u) = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = \Delta u = 0,$$

wieder mit dem Satz von Schwarz. Es ist also g holomorph und hat daher, weil G sternförmig ist, eine Stammfunktion $h: G \rightarrow \mathbb{C}$, $h' = g$ (siehe Aufgabe-09-a). Für $w := \operatorname{Re}(h): G \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann:

$$\partial_x(w - u) = \operatorname{Re}(\partial_x h) - \partial_x u = \operatorname{Re}(h') - \partial_x u = \operatorname{Re}(g) - \partial_x u = 0,$$

weil für ein holomorphes h aus $\partial_{\bar{z}} h = 0$ und $\partial_z h = h'$ folgt: $\partial_x h = h'$ und $\partial_y h = ih'$. Damit sieht man auch

$$\begin{aligned} \partial_y(w - u) &= \operatorname{Re}(h_y) - \partial_y u = \operatorname{Re}(ih') - \partial_y u = \operatorname{Re}(ig) - \partial_y u \\ &= \operatorname{Re}(i\partial_x u + \partial_y u) - \partial_y u = \partial_y u - \partial_y u = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $D(w - u) = 0$, also $w - u$ konstant,

$$w - u = c,$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Setzt man dann $f := h - c$, so ist auch f holomorph und $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(h - c) = w - c = u$.

Aufgabe 13. (a) Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ ein (stetiger) Weg. Zeigen Sie, dass es ein stetiges $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}.$$

(Hinweis: Sei $D_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $D_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Man zerlege $[0, 1]$ so in endlich viele Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, \dots, m$; $t_0 = 0, t_m = 1$), dass $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ in D_1 oder in D_2 liegt. Dann benutze man für $\varphi|_{[t_{j-1}, t_j]}$ einen Zweig des Logarithmus $\log_1: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $\log_2: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$.)

(b) Seien $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (a) zwei solche *Lifts*. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\psi(t) = \varphi(t) + 2\pi k.$$

(Hinweis: Eine stetige Funktion $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ muss konstant sein.)

(c) Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ nun ein *geschlossener* Weg. Man definiert die *Umlaufzahl* $n(\gamma) \in \mathbb{Z}$ (bzgl. 0) nach Wahl eines Lifts wie unter (a) durch $n(\gamma) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0))$. Begründen Sie, warum $n(\gamma)$ tatsächlich ganzzahlig ist und warum sie wohldefiniert ist (d.h.: nicht von der Wahl des Lifts abhängt.) Zeigen Sie dann für den Fall, dass γ sogar stetig differenzierbar ist:

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Ein topologisches Argument, welches die Kompaktheit von $I = [0, 1]$ benutzt, zeigt, dass es eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ von I gibt, so dass für jedes $j = 1, \dots, m$ $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_1$ oder $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq D_2$ ist. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq D_1$ ist und dann abwechselnd $\gamma([t_1, t_2]) \subseteq D_2$, $\gamma([t_2, t_3]) \subseteq D_1$ usw. (Wenn etwa D_1 zweimal auftaucht, fassen wir die beiden Teilintervalle zu einem zusammen. Siehe auch die Anmerkung im Anschluss an den Lösungsvorschlag.) Wir wissen bereits, dass es auf D_1 einen Zweig des Logarithmus $\log_1: D_1 \rightarrow \mathbb{C}$ gibt (den Hauptzweig, siehe Aufgabe-10). Da D_2 ebenfalls sternförmig ist (bzgl. -1), gibt es auch auf D_2 einen Zweig $\log_2: D_2 \rightarrow \mathbb{C}$ des Logarithmus, z.B.

$$\log_2(z) = i\pi + \int_{\alpha_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wo α_z der geradlinige Weg von -1 nach z sei. Über ihren Imaginärteil induziert jeder Zweig des Logarithmus eine Argumentfunktion $\arg := \text{Im}(\log): G \rightarrow \mathbb{R}$, weil für alle $z \in G$ mit

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$$

gilt:

$$z = |z|e^{i\arg(z)}.$$

Weitere Zweige $\log^{(k)}$ sind dann durch Addition von $2\pi ik$ (mit $k \in \mathbb{Z}$) gegeben (und nur solche gibt es noch, siehe auch Aufgabe-14),

$$\log^{(k)}(z) = \log(z) + 2\pi ik.$$

Wir setzen nun auf $[t_0, t_1]$, weil $\gamma([t_0, t_1]) \subseteq D_1$ ist, geht das):

$$\varphi(t) := \text{Im}(\log_1(\gamma(t))).$$

Dann ist wirklich

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)},$$

für alle $t \in [t_0, t_1]$ und φ ist auch stetig, da γ und \log_1 stetig sind. In $t = t_1$ ist nun $\gamma(t) \in D_1 \cap D_2$, weil $\gamma([t_1, t_2]) \subseteq D_2$ ist. Da auch

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{\varphi_2(t)},$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$ ist, wenn wir $\varphi_2(t) := \text{Im}(\log_2(\gamma(t)))$ setzen, gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1) + 2\pi k.$$

Wir korrigieren daher \log_2 um die Konstante $2\pi ik$, setzen $\tilde{\log}_2 := \log_2 + 2\pi ik$ und definieren damit $\tilde{\varphi}_2: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\varphi}_2(t) := \text{Im}(\tilde{\log}_2(\gamma(t))),$$

für alle $t \in [t_1, t_2]$. Die Funktionen φ_1 und $\tilde{\varphi}_2$ setzen sich nun, weil sie in t_1 nach Konstruktion übereinstimmen, zu einer stetigen Funktion $\varphi_{12}: [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen, so dass für alle $t \in [t_0, t_2]$ gilt:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi_{12}(t)}.$$

So fahren wir nun fort und nach m Schritten haben wir dann ein stetiges $\varphi = \varphi_{12\dots m}: [t_0, t_m] = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert mit

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)},$$

für alle $t \in [0, 1]$.

(b) Seien also $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei solche *Argumentfunktionen* für γ , also

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)} = |\gamma(t)|e^{i\psi(t)}.$$

Es folgt:

$$e^{i(\varphi(t) - \psi(t))} = \frac{|\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}}{|\gamma(t)|e^{i\psi(t)}} = 1.$$

Also gibt es für jedes $t \in I$ ein $k(t) \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi k(t).$$

Da φ und ψ stetig sind, ist es auch $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, denn

$$k(t) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(t) - \psi(t)).$$

Z.B. mit dem Zwischenwertsatz sieht man aber, dass eine stetige Funktion $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die nur ganzzahlige Werte annimmt, konstant sein muss. (Wäre etwa $k(t_1) \neq k(t_2)$ für $t_1 < t_2$, so wählt man eine nicht-ganzzahlige Zahl $c \in [k(t_1), k(t_2)]$ bzw. $[k(t_2), k(t_1)]$, und dann müsste c auch angenommen werden.) Damit gibt es also ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $t \in [0, 1]$ gilt:

$$\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi \cdot k.$$

(c)(i) Sei $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ Argumentfunktion für einen geschlossenen Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$, also $\gamma(0) = \gamma(1) =: c$. Da dann

$$c = |c|e^{i\varphi(0)} = |c|e^{i\varphi(1)}$$

ist, muss wieder

$$\varphi(1) - \varphi(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

sein, also

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Sind $\varphi, \psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei solche Argumentfunktionen, so gibt es nach (b) ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(t) - \psi(t) = 2\pi k$, für alle $t \in [0, 1]$. Es ist dann

$$\frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0)) = \frac{1}{2\pi}((\psi(1) + 2\pi k) - (\psi(0) + 2\pi k)) = \frac{1}{2\pi}(\psi(1) - \psi(0)),$$

also ist $n(\gamma) \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert.

(iii) Sei schließlich γ zudem stetig differenzierbar. Da $\gamma(t) \neq 0$ ist, für alle $t \in [0, 1]$, ist dann auch $r: [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$, $r(t) = |\gamma(t)|$, stetig differenzierbar. Ist nun $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Argumentfunktion für γ , so ist φ wenigstens stückweise stetig differenzierbar, da sie stückweise über die Logarithmuszweige erklärt wurde. (Wir bräuchten daher für γ nur stückweise Differenzierbarkeit verlangen. Andererseits zeigt eine genauere Analyse der Konstruktion der Argumentfunktion φ , dass sie auch an den Unterteilungspunkten t_j ($j = 1, \dots, m-1$) glatt ist, wenn γ es ist, da die beiden Zweige, die bei der Definition um t_j benutzt wurden, um t_j übereinstimmen.) Jetzt können wir rechnen: Aus

$$\gamma = re^{i\varphi}$$

folgt:

$$\dot{\gamma} = \dot{r}e^{i\varphi} + ri\dot{\varphi}e^{i\varphi} = e^{i\varphi}(\dot{r} + ir\dot{\varphi}).$$

Damit ist nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\dot{\gamma}(t) dt}{\gamma(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{e^{i\varphi}(\dot{r} + ir\dot{\varphi})}{re^{i\varphi}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left(\frac{\dot{r}}{r} + i\dot{\varphi} \right) dt = \frac{1}{2\pi i} (\ln(r)|_0^1 + i\varphi|_0^1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} (\ln(r(1)) - \ln(r(0))) + \frac{1}{2\pi} (\varphi(1) - \varphi(0)). \end{aligned}$$

Wegen $r(1) = r(0)$ folgt also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = n(\gamma).$$

[Anmerkung: Zu einer wie oben beschriebenen Unterteilung kann man wie folgt kommen: Die beiden offenen Mengen $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}^*$ überdecken \mathbb{C}^* , $\mathbb{C}^* = D_1 \cup D_2$. Deshalb überdecken die Urbilder $\gamma^{-1}(D_1), \gamma^{-1}(D_2) \subseteq [0, 1]$ das Intervall $[0, 1]$, da $\text{im}(\gamma) \subseteq \mathbb{C}^*$ ist. Nun sind zwar $\gamma^{-1}(D_1)$ und $\gamma^{-1}(D_2)$ wegen der Stetigkeit von γ offen, aber i.a. nicht zusammenhängend. Man kann aber jeden topologischen Raum X in seine so genannten *Zusammenhangskomponenten* $X_i \subseteq X$ ($i \in I$) zerlegen, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Dabei sind X_i maximale zusammenhängende Teilmengen von X , die offen und zusammenhängend sind. Eine offene und zusammenhängende Teilmenge in \mathbb{R} ist ein Intervall. Deshalb gibt es jetzt Familien $(J_i^{(1)})_{i \in I}$ und $(J_j^{(2)})_{j \in J}$ von Intervallen, so dass

$$\gamma^{-1}(D_1) = \bigcup_{i \in I} J_i^{(1)}, \quad \gamma^{-1}(D_2) = \bigcup_{j \in J} J_j^{(2)}.$$

Alle diese Intervalle zusammen $(J_i^{(1)}, J_j^{(2)})_{i,j}$ sind dann eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $I = [0, 1]$. Deshalb gibt es bereits endlich viele J_0, \dots, J_m unter diesen, die I überdecken, $I = J_0 \cup \dots \cup J_m$. Unter diesen muss eines sein, welches $0 \in I$ enthält, nennen wir es

I_0 . Ist $I_0 = [0, s_0)$, so muss es ein zweites geben, nennen wir es I_1 , welches s_0 enthält. Dann ist $I_0 \cap I_1 \neq \emptyset$ und wir können unseren ersten Zerteilungspunkt $t_1 \in I_0 \cap I_1$ wählen. Und so fahren wir fort. Dann ist gesichert, dass $[t_{j-1}, t_j] \subseteq I_{j-1}$ ist und damit $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ enthalten in D_1 oder D_2 . (Man kann annehmen immer abwechselnd.) Das liefert die gewünschte Zerlegung (t_0, \dots, t_m) von I .]

Aufgabe 14. Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $\log: G \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf G . Sei weiter $a \in \mathbb{C}$. Man definiert den zu \log gehörenden Zweig der a . Potenz auf G durch $\text{pot}_a: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\text{pot}_a(z) = \exp(a \cdot \log(z)) =: z^a.$$

(a) Berechnen Sie alle möglichen Werte von i^i , 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$. (Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass sich zwei Zweige des Logarithmus nur durch eine konstante Funktion $2\pi i \cdot k$, mit $k \in \mathbb{Z}$, unterscheiden können (vgl. auch Aufgabe-13-b).)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man nennt eine stetige Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ einen Zweig der n . Wurzel auf G , wenn für alle $z \in G$ gilt: $f(z)^n = z$. Zeigen Sie, dass es für einen solchen Zweig eine n . Einheitswurzel $\omega \in \mathbb{C}^*$ (siehe Aufgabe-01) gibt, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right).$$

Lösungsvorschlag. (a) ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\log: G \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, so ist $\log_k: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\log_k(z) = \log(z) + 2\pi i k,$$

ebenfalls ein Zweig des Logarithmus, denn

$$\exp \circ \log_k(z) = \exp(\log(z) + 2\pi i k) = \exp \circ \log(z) + e^{2\pi i k} = z,$$

wegen der $2\pi i$ -Periodizität der Exponentialfunktion. Ist umgekehrt $\tilde{\log}$ irgendein Zweig des Logarithmus auf G , so muss $\tilde{\log} = \log_k$ sein, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Denn für jedes $z \in G$ gibt es dann ein $k(z) \in \mathbb{Z}$ mit

$$\tilde{\log}(z) = \log(z) + 2\pi i k(z),$$

denn

$$\exp(\tilde{\log}(z) - \log(z)) = \frac{\exp \circ \tilde{\log}(z)}{\exp \circ \log(z)} = \frac{z}{z} = 1.$$

Weil G zusammenhängend ist und $k: G \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ wegen

$$k(z) = \frac{1}{2\pi i} (\tilde{\log}(z) - \log(z))$$

stetig, muss k konstant sein (vgl. Aufgabe-13-b). Hat man also einen Wert von $\log(z)$ so sind die anderen Werte aller Zweige gerade $\log(z) + 2\pi i k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(i) Bei $z = i$ ist für den Hauptweig $\log: D \rightarrow \mathbb{C}$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$,

$$\log(i) = \ln|i| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2},$$

also sind die möglichen Werte gerade $i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik$, mit $k \in \mathbb{Z}$. Das sind gerade die Urbilder von i unter $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$,

$$\exp^{-1}(i) = \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Es folgt:

$$i^i = \exp(i \log(i)) = \exp\left(i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right) = \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi k\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$. Für den Hauptzweig ist also:

$$i^i = e^{-\pi/2}.$$

(ii) Weiter ist

$$\log(2) = \ln(2) + 2\pi ik, \quad k \in \mathbb{Z},$$

also

$$2^{-i} = \exp(-i \log(2)) = \exp(-i \ln(2) + 2\pi k),$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Für den Hauptzweig ist also

$$2^{-i} = e^{-i \ln(2)}.$$

(iii) Für den Zweig $\log: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\log(z) = i\pi + \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wo γ_z der geradlinige Weg von -1 nach z ist, ist $\log(-1) = i\pi$. Für die anderen Zweige ist dann also

$$\log(-1) = i\pi + 2\pi ik = i\pi(1 + 2k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Es folgt zunächst für $\sqrt{i} = i^{1/2}$ nach der Definition der allgemeinen Potenz

$$\sqrt{i} = \exp\left(\frac{1}{2} \log(i)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik\right)\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4} + i\pi k\right) = \pm e^{i\pi/4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(je nachdem ob k gerade oder ungerade ist), für den Hauptzweig: $\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$, und daraus dann

$$(-1)^{\sqrt{i}} = \exp(\sqrt{i} \log(-1)) = \exp(\pm e^{i\pi/4} \cdot i(2k+1)\pi) = \exp(i\pi e^{i\pi/4}(2k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Für die beiden Hauptzweige ist dann:

$$(-1)^{\sqrt{i}} = \exp(i\pi e^{i\pi/4}).$$

(b) Für $f_1: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_1(z) = z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right),$$

folgt offenbar, dass f_1 ein Zweig der n . Wurzel auf G ist, denn

$$f_1(z)^n = \left(\exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right)\right)^n = \exp\left(n \cdot \left(\frac{1}{n} \log(z)\right)\right) = \exp \circ \log(z) = z,$$

denn $\log: G \rightarrow \mathbb{C}$ ist ja nach Voraussetzung ein Zweig des Logarithmus. Da $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ist, ist insbesondere $f_1(z) \neq 0$, für alle $z \in G$. (Wenn \log der Hauptzweig ist, nennen wir f_1 den

Hauptzweig der n . Wurzel.) Ist nun $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ein beliebiger Zweig der n . Wurzel auf G , so betrachten wir die dann auch stetige Funktion $h: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(z) = \frac{f(z)}{f_1(z)}.$$

Dann ist

$$h(z)^n = \frac{f(z)^n}{f_1(z)^n} = \frac{z}{z} = 1,$$

also gibt es für jedes $z \in G$ eine n . Einheitswurzel $\omega(z) \in U_n \subseteq \mathbb{C}^*$ (wo U_n die Gruppe der n . Einheitswurzeln sind, vgl. Aufgabe-01) mit $h(z) = \omega(z)$. Da aber $U_n \subseteq \mathbb{C}^*$ endlich ist, muss jede stetige Funktion $h: G \rightarrow U_n \subseteq \mathbb{C}$ wieder konstant sein. Es gibt also ein $\omega \in U_n$ mit

$$f(z) = \omega f_1(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{n} \log(z)\right).$$

Aufgabe 15. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht-konstant. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in \mathbb{C} liegt. (Erinnerung: $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *dicht*., wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \neq \emptyset$ gilt: $D \cap U \neq \emptyset$. Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Liouville.)

Lösungsvorschlag. Angenommen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei holomorph und $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ sei nicht dicht. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ und ein $r > 0$, so dass $f(\mathbb{C}) \cap B_r(a) = \emptyset$ ist, also $|f(z) - a| \geq r$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a},$$

dass g holomorph ist, $g(z) \neq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$ und mit $M := 1/r$ gilt:

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{r} = M.$$

Nach dem Satz von Liouville muss g deshalb konstant sein. Ist $g(z) = c \neq 0$, für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist dann

$$f(z) = \frac{1}{c} + a, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

also auch konstant. Ist also f nicht-konstant, so muss demnach $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}$ dicht liegen.

Aufgabe 16. Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und es existiere $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$, $M > 0$ so, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt:

$$|f(z)| \leq M|z|^n.$$

Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion vom Grad kleiner oder gleich n ist. (Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Ungleichungen, dass $f^{(n+1)} = 0$ ist.)

Lösungsvorschlag. (i) Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig und $r > R + |z|$. Dann ist für jedes $\zeta \in \partial B_r(z)$:

$$|\zeta| \geq |\zeta - z| - |z| = r - |z| > R$$

und

$$|\zeta| \leq |\zeta - z| + |z| = r + |z| < r + (r - R) < 2r.$$

Daraus folgt

$$|f(\zeta)| \leq M|\zeta|^n \leq M(2r)^n = 2^n Mr^n.$$

Nach den Cauchy-Abschätzungen folgt daher, dass

$$\begin{aligned} |f^{(n+1)}(z)| &\leq \frac{(n+1)!}{r^{n+1}} \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial B_r(z)\} \leq \frac{(n+1)!2^n Mr^n}{r^{n+1}} \\ &= (n+1)!2^n M \frac{1}{r} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

für $r \rightarrow \infty$. Da wir $r > R + |z|$ beliebig groß wählen können, folgt:

$$f^{(n+1)}(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Behauptung. f ist ein Polynom mit $\deg(f) \leq n$.

Induktion nach n : $n = 0$: $f' = 0$, also $f = \text{const.}$ und damit ist f polynomial mit $\deg(f) = 0$.

$n \rightarrow n + 1$: Dann ist

$$(f')^{(n+1)} = f^{(n+2)} = 0,$$

und damit ist f' nach Induktionsvoraussetzung ein Polynom mit $\deg(f') \leq n$, also

$$f'(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

mit $a_k \in \mathbb{C}$ ($k = 0, \dots, n$). Dann ist neben f auch $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(z) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} z^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_{j-1}}{j} z^j$$

Stammfunktion von f' . Es existiert also ein $b_0 \in \mathbb{C}$ mit $f - F = b_0$. Mit $b_k := a_{k-1}/k$, für $k = 1, \dots, n+1$, folgt dann tatsächlich

$$f(z) = b_0 + F(z) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k z^k,$$

also ist f ein Polynom mit $\deg(f) \leq n+1$.

Für eine formale (komplexe) Potenzreihe $P = \sum_0^\infty a_n X^n$ definiert man ihre *formale Ableitung* durch

$$P' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

Aufgabe 17. Sei P eine formale Potenzreihe und $R_P \in [0, \infty]$ ihr Konvergenzradius. Zeigen Sie: $R_{P'} = R_P$.

Lösungsvorschlag. (i) $R_{P'} \geq R_P$: Das hatte wir bereits in der Vorlesung bemerkt. Die konvergente Potenzreihe $P \in \mathbb{C}[[X]]$ gibt Anlass zu der holomorphen Funktion $f = f_P: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = P(z)$ und $R = R_P$. Dabei konvergieren die Partialsummen $f_n: B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

kompakt gegen f . Daraus folgt, dass

$$f'(z) = \lim f'_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k$$

ist. Das zeigt, dass der Konvergenzradius von P' mindestens so groß ist wie R , denn $(\sum_0^{n-1} (k+1) a_{k+1} z^k)$ sind die Partialsummen von $P'(z)$.

(ii) $R_{P'} \leq R_P$: Wir betrachten jetzt die holomorphe Funktion $g: B_{R'}(0) \rightarrow \mathbb{C}$, die durch P' gegeben ist, $g(z) = P'(z)$ (bei $R' := R_{P'}$). Die Partialsummen $g_n: B_{R'}(0) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} z^k,$$

konvergieren kompakt gegen g . Sei nun $z \in B_{R'}(0)$ beliebig aber fest. Dann integrieren wir g entlang der geradlinigen Verbindung von 0 nach z , $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow B_{R'}(0)$, $\gamma_z(t) = tz$. Weil $C := \gamma[0, 1] \subseteq B_{R'}(0)$ kompakt ist, konvergiert $(g_n|_C)$ gleichmäßig gegen $g|_C$ und damit auch $((g_n \circ \gamma_z) \dot{\gamma}_z)$ gleichmäßig gegen $(g \circ \gamma_z) \dot{\gamma}_z$ auf $[0, 1]$. Deshalb darf man nach Weierstraß Integral und Funktionenlimes vertauschen und erhält

$$\int_{\gamma_z} g(\zeta) d\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_z} g_n(\zeta) d\zeta.$$

Es ist aber $\dot{\gamma}_z(t) = z$, für alle $t \in [0, 1]$, also

$$g_n \circ \gamma_z(t) \cdot \dot{\gamma}_z(t) = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} (tz)^k \cdot z = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} z^{k+1} t^k.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_z} g_n(\zeta) d\zeta &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} z^{k+1} t^k dt = \sum_{k=0}^n (k+1) a_{k+1} z^{k+1} \frac{1}{k+1} t^{k+1} \Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^n a_{k+1} z^{k+1}. \end{aligned}$$

Da $z \in B_{R'}(0)$ beliebig war, erhalten wir, dass

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = a_0 + \int_{\gamma_z} g(\zeta) d\zeta$$

ist, also für alle $z \in B_{R'}(0)$ konvergiert, und damit muss $R_P \geq R'$ sein.

Wir nennen eine holomorphe Funktion $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) einen *Zweig des Arcustangens*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $\tan \circ f(z) = z$.

Aufgabe 18. (a) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}: \exists t \in \mathbb{R}: |t| \geq 1 \text{ und } z = it\}$ und $\text{Arctan}: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\text{Arctan}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2},$$

wo γ_z der geradlinige Weg von 0 nach z ist. Zeigen Sie, dass Arctan ein Zweig des Arcustangens ist. (Wir nennen ihn den *Hauptzweig*.)

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ wie unter (a), $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $\text{Log}: G \rightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Zeigen Sie zunächst, dass $g: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, das Gebiet D nach G abbildet und dann für alle $z \in D$:

$$\text{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \text{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

Lösungsvorschlag. (a) Hier habe ich, glaube ich, beim Stellen der Aufgabe einen Denkfehler gemacht, in dem ich glaubte, ich könnte mit der Kettenregel direkt zeigen, dass

$$\frac{d}{dz} \tan \circ \text{Arctan}(z) = 1$$

ist, was auch stimmt, aber nicht so einfach zu ermitteln ist. Wenn man zuerst Teil (b) macht und dann zeigt, dass die dortige Funktion $z \mapsto \frac{1}{2i} \text{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$ ein Zweig des Arcustangens ist, folgt es mit Teil (b) dann auch für den so von uns definierten Arcustangens. Wir machen daher zunächst Teil (b). Sorry.

(b) Die holomorphe Funktion $g: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, bildet das Gebiet D tatsächlich nach $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ ab (sogar *biholomorph*, d.h.: $g|_D: D \rightarrow G$ ist bijektiv und ihre Umkehrung auch holomorph), denn ist $g(z) \notin G$ so gibt es also ein $\lambda \geq 0$ mit

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -\lambda,$$

also

$$1+iz = -\lambda(1-iz),$$

woraus nach wenigen Umformungen $\lambda \neq 1$ und

$$z = -i \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

folgt. Für $\lambda > 1$ ist aber

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = 1 + \frac{2}{\lambda-1} > 1,$$

und für $0 \leq \lambda < 1$ ist

$$\frac{\lambda+1}{\lambda-1} = -1 + \frac{2\lambda}{\lambda-1} \leq -1,$$

also $z \notin D$. Es gilt also: $z \in D \Rightarrow g(z) \in G$.

Nun differenzieren wir zunächst g :

$$g'(z) = \frac{i(1-iz) - (1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} = \frac{(i+z) - (-i+z)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2},$$

und dann mit der Kettenregel wegen $\text{Log}'(w) = \frac{1}{w}$, für alle $w \in G$:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1+iz}{1-iz} \right) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1-iz}{1+iz} \cdot \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{1}{1-(iz)^2} = \frac{1}{1+z^2},$$

ebenso wie $\text{Arctan}'(z) = 1/(1+z^2)$. Bei $z = 0$ stimmen beide Funktionen überein und damit auf ganz D ,

$$\text{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

(a) Wir prüfen, ob die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right),$$

ein Zweig des Arcustangens ist. Dazu formen wir den Term für den Tangens zunächst so um:

$$\tan(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = (-i) \frac{(e^{2iz} - 1)e^{-iz}}{(e^{2iz} + 1)e^{-iz}} = i \frac{1 - e^{2iz}}{1 + e^{2iz}}.$$

Es ist nun

$$e^{2if(z)} = \exp \circ \text{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) = \frac{1+iz}{1-iz},$$

weil Log ein Zweig des Logarithmus ist und damit

$$\tan \circ f(z) = i \frac{1 - \frac{1+iz}{1-iz}}{1 + \frac{1+iz}{1-iz}} = i \frac{(1-iz) - (1+iz)}{(1-iz) + (1+iz)} = i \frac{-2iz}{2} = z,$$

für alle $z \in D$. Damit ist f ein Zweig des Arcustangens und wegen $f = \text{Arctan}$ nach Teil (b) auch Arctan .

Ein topologischer Raum X heißt

- *zusammenhängend*, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein;
- *wegzusammenhängend*, wenn gilt: Für alle $x_0, x_1 \in X$ gibt es einen Weg $\alpha: I \rightarrow X$ (d.h.: α ist stetig, wo $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall mit der von \mathbb{R} induzierten Topologie ist) mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$.

Aufgabe 19. (a) Sei X ein zusammenhängender Raum. Zeigen Sie: Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und offen, so ist $A = X$.

(b) Zeigen Sie: $I = [0, 1]$ ist zusammenhängend. (Hinweis: Ist $I = U \dot{\cup} V$ und o.E. $0 \in U$, so betrachte

$$b := \sup\{x \in I : [0, x] \subseteq U\}.$$

(c) Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

Lösungsvorschlag. (a) Es ist $X = A \dot{\cup} A^c$ eine disjunkte Zerlegung in zwei offene Mengen, denn da A auch abgeschlossen ist, ist A^c auch offen. Deshalb muss eine von beiden Teilmengen leer sein. A ist es aber nach Voraussetzung nicht, also ist $A^c = \emptyset$, d.i.: $A = X$.

(b) Ist $I = U \dot{\cup} V$ eine disjunkte Zerlegung in (relativ-) offene Teilmengen $U, V \subseteq I$, so sei o.E. $0 \in U$. Wir setzen dann

$$b := \sup M, \quad \text{mit} \quad M = \{x \in I : [0, x] \subseteq U\}.$$

Dann ist zunächst $b \in I$, da $M \neq \emptyset$ ist, weil $0 \in M$ ist. Weiterhin ist $b \in U$, weil U abgeschlossen ist (da $U^c = V$ offen ist). Es gibt nämlich aus der Definition des Supremum heraus eine (monoton wachsende) Folge (x_n) in M mit $(x_n) \rightarrow b$. Da $M \subseteq U$ ist, ist also $x_n \in U$, für alle $n \in \mathbb{N}$, und daher muss b auch in U sein (und sogar in M). Wäre nun $b < 1$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass auch $b + t\varepsilon \in U$ wäre, für alle $t \in [0, 1]$, denn U ist auch offen. Aber dann wäre $b + \varepsilon \in M$: Das ist ein Widerspruch zur Definition von b . Es ist also $b = 1$ und damit $[0, 1] \subseteq U$, also $V = \emptyset$. Das zeigt, dass I zusammenhängend ist.

(c) Sei $X = U \dot{\cup} V$ und angenommen: $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$. Dann gibt es also Elemente $x \in U$ und $y \in V$. Da X wegzusammenhängend ist, finden wir einen Weg $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$, der x und y verbindet, $\alpha(0) = x$ und $\alpha(1) = y$. Weil α stetig ist, sind $\alpha^{-1}(U)$ und $\alpha^{-1}(V)$ offen in I und wegen $X = U \dot{\cup} V$ ist auch $I = \alpha^{-1}(U) \dot{\cup} \alpha^{-1}(V)$. Aber beide sind nicht-leer, denn $0 \in \alpha^{-1}(U)$ und $1 \in \alpha^{-1}(V)$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass I zusammenhängend ist.

Aufgabe 20. Beweisen Sie folgende Variante des Identitätssatzes: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $a \in G$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{(n)}(a) = 0$. Dann ist f konstant. (Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $A := \{z \in G: f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen Sie, dass diese nicht-leer, abgeschlossen und offen ist.)

Lösungsvorschlag. Wir betrachten also

$$A = \{z \in G : f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\} \subseteq G.$$

Da $f^{(n)}: G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, ist $(f^{(n)})^{-1}(0) \subseteq G$ abgeschlossen und damit auch

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})^{-1}(0).$$

Da f holomorph und damit komplex-analytisch ist, ist A aber auch offen. Ist nämlich $z_0 \in A$, so gibt es ein $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subseteq G$, so dass die Taylorreihe T_{f, z_0} von f in z_0 für alle $z \in B_r(z_0)$ gegen $f(z)$ konvergiert,

$$f(z) = T_{f, z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Da $f^{(n)}(z_0) = 0$ ist, für alle $n \in \mathbb{N}$, ist aber $T_{f, z_0}(z) = f(z_0)$, für alle $z \in B_r(z_0)$, also $f|_{B_r(z_0)} = \text{const}$. Es folgt, dass auch

$$f^{(n)}(z) = 0$$

ist, für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in B_r(z_0)$. Das zeigt: $B_r(z_0) \subseteq A$. Also ist A auch offen. Nach Voraussetzung ist $a \in A$, also $A \neq \emptyset$. Nach Aufgabe-19-a muss deshalb $A = G$ sein, also insbesondere $f'(z) = 0$, für alle $z \in G$. Deshalb ist $f = \text{const}$.

Aufgabe 21. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F: [a, b] \times G \rightarrow \mathbb{C}$, $(t, z) \mapsto F(t, z)$, stetig. Zudem sei $F_t: G \rightarrow \mathbb{C}$, $F_t(z) := F(t, z)$, für jedes $t \in [a, b]$ reell-differenzierbar, und $D_2F: [a, b] \times G \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R})$, $D_2F(t, z) = DF_t(z)$, sei stetig. Zeigen Sie, dass dann $H: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$H(z) = \int_a^b F(t, z) dt,$$

wohldefiniert und reell-differenzierbar ist mit

$$DH(z) = \int_a^b DF_t(z) dt, \quad \forall z \in G.$$

Lösungsvorschlag. Sei $z_0 \in G$ und $r > 0$ so, dass $B_r(z_0) \subseteq G$ ist. Wir setzen $\varphi: B_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi(h) = H(z_0 + h) - H(z_0) - \left(\int_a^b D_2F(t, z) dt \right) \cdot h$$

und müssen demnach zeigen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0.$$

(Man beachte, dass das Integral definiert ist, da D_2F für festes (aber beliebiges) $z \in G$ insbesondere stetig ist.) Für den geradlinigen Weg von z_0 zu $z_0 + h$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$, $\gamma(s) = z_0 + sh$, gilt $\gamma'(s) = h$ und daher

$$\begin{aligned} F_t(z_0 + h) - F_t(z_0) &= F_t \circ \gamma(1) - F_t \circ \gamma(0) = \int_0^1 \frac{d}{ds} (F_t \circ \gamma)(s) ds = \int_0^1 DF_t(\gamma(s)) \gamma'(s) ds \\ &= \int_0^1 DF_t(\gamma(s)) \cdot h ds, \end{aligned}$$

da $F_t \circ \gamma$ stetig differenzierbar ist. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da D_2F nach Voraussetzung stetig ist, ist es auf Kompakta wie z.B. $K = [0, 1] \times \overline{B_\delta(z_0)}$ sogar gleichmäßig stetig. Wir finden deshalb ein $\delta > 0$, so dass für alle $t \in [0, 1]$ und alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt:

$$\|DF_t(z) - DF_t(z_0)\| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

(Wir benutzen hier die Operatornorm $\|\cdot\|$ zur euklidischen Norm auf $\text{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.) Nun können wir $\varphi(h)$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\varphi(h)\| &= \left\| \left(\int_a^b (F_t(z_0 + h) - F_t(z_0)) dt - \left(\int_a^b DF_t(z_0) dt \right) \cdot h \right) \right\| \\ &= \left\| \int_a^b (F_t(z_0 + h) - F_t(z_0) - DF_t(z_0)h) dt \right\| \\ &= \left\| \int_a^b \left(\int_0^1 DF_t(\gamma(s))h ds - \int_0^1 DF_t(z_0) ds \cdot h \right) dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \left(\int_0^1 \| (DF_t(\gamma(s)) - DF_t(z_0)) \cdot h \| ds \right) dt \\ &\leq \int_a^b \int_0^1 \|DF_t(\gamma(s)) - DF_t(z_0)\| \cdot \|h\| ds dt. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \leq \int_a^b \int_0^1 \frac{\varepsilon}{b-a} ds dt = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon.$$

Es ist also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$$

und damit H differenzierbar mit

$$DH(z) = \int_a^b D_2 F(t, z) dt.$$

Aufgabe 22. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich-oft differenzierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann reell-analytisch, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subseteq G$ und einer komplex-analytischen Funktion $\hat{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit $\hat{f}|I = f$.

Lösungsvorschlag. „ \Leftarrow “: Sei also $\hat{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $I \subseteq G$ und $f = \hat{f}|I$ (sowie $f(I) \subseteq \mathbb{R}$). Für jedes $x_0 \in I$ gibt es dann ein $r_{x_0} > 0$, so dass $I_{x_0} := (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}) \subseteq I$ und $B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$ ist und die Taylorreihe $T_{\hat{f}, x_0}$ von \hat{f} in x_0 für alle $z \in B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$ gegen $\hat{f}(z)$ konvergiert,

$$\hat{f}(z) = T_{\hat{f}, x_0}(z).$$

Die Taylorreihe $T_{f, x_0} \in \mathbb{R}[[X]]$ von f in x_0 ist aber die gleiche wie die von \hat{f} in x_0 , denn

$$f'(x_0) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial z}(x_0) = \hat{f}'(x_0),$$

und genauso für die höheren Ableitungen in x_0 . Es ist also

$$f(x) = \hat{f}(x) = T_{\hat{f}, x_0}(x) = T_{f, x_0}(x), \quad \forall x \in B_{r_{x_0}}(x_0) \cap I = I_{x_0}.$$

Also ist f reell-analytisch.

„ \Rightarrow “: Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ reell-analytisch, so gibt es für jedes $x_0 \in I$ ein $r_{x_0} > 0$, so dass $I_{x_0} := (x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}) \subseteq I$ ist und die Taylorreihe $T_{f, x_0} \in \mathbb{R}[[X]]$ von f in x_0 für alle $x \in I_{x_0}$ gegen $f(x)$ konvergiert,

$$f(x) = T_{f, x_0}(x).$$

Der Konvergenzradius von T_{f, x_0} ist also größer als Null und wir können $f|I_{x_0}$ holomorph auf $B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq \mathbb{C}$ durch $f_{x_0}: B_{r_{x_0}}(x_0) \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f_{x_0}(z) = T_{f, x_0}(z),$$

fortsetzen, d.i.: $f_{x_0}|I_{x_0} = f|I_{x_0}$. Wir setzen nun

$$G := \bigcup_{x_0 \in I} B_{r_{x_0}}(x_0).$$

Dann ist offenbar $I \subseteq G$, denn für jedes $x_0 \in I$ ist $x_0 \in B_{r_{x_0}}(x_0) \subseteq G$, und G ist als Vereinigung von offenen Mengen offen. G ist auch wegzusammenhängend, denn sind $z_1, z_2 \in G$ beliebig, so

gibt es $x_1, x_2 \in I$ mit $z_1 \in B_{r_{x_1}}(x_1)$ und $z_2 \in B_{r_{x_2}}(x_2)$. Dann verbinde man z_1 zunächst geradlinig zu $x_1 \in I$, diesen dann innerhalb von I (geradlinig) mit x_2 , und diesen wiederum geradlinig mit z_2 . Dieser Weg verläuft dann ganz in G . G ist also ein Gebiet. Auf G setzen wir nun $\hat{f}: G \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\hat{f}(z) := f_{x_0}(z), \quad \text{falls } z \in B_{r_{x_0}}(x_0) \text{ ist.}$$

Dann wollen wir zunächst prüfen, dass dies wohldefiniert ist. Seien dazu $x_1, x_2 \in I$, so dass mit $B_j := B_{r_{x_j}}(x_j)$ ($j = 1, 2$) gilt: $z \in B_1 \cap B_2$. Mit $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ ist dann auch $J := I_{x_1} \cap I_{x_2} \subseteq I$ nicht leer und damit ein offenes Intervall. Nun gilt mit $f_1 := f_{x_1}$ und $f_2 := f_{x_2}$:

$$f_1|_J = f|_J = f_2|_J.$$

Da $B_1 \cap B_2$ zusammenhängend ist, muss nach dem Identitätssatz

$$f_1|(B_1 \cap B_2) = f_2|(B_1 \cap B_2)$$

sein, denn J enthält sicher einen Punkt p und eine Folge (x_n) mit $x_n \in J \setminus \{p\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), die gegen p konvergiert. Insbesondere ist damit

$$f_1(z) = f_2(z)$$

und damit $\hat{f}(z)$ wohldefiniert. Weil \hat{f} lokal immer mit einem f_{x_0} übereinstimmt und letztere holomorph sind, ist \hat{f} auch holomorph. Nach Konstruktion ist schließlich $\hat{f}|_I = f$.

Aufgabe 23. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $a \in G$ die einzige Nullstelle von g . Weiter sei $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $h: G \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = f(z)/g(z)$, gilt

$$\text{Res}_a(h) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(b) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und g und dort ihre Residuen:

$$f(z) = \frac{1}{z(z - \pi)^2}, \quad g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Weil $g: G \rightarrow \mathbb{C}$ eine einfache Nullstelle in $a \in G$ hat, gibt es ein holomorphes $v: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $v(a) \neq 0$ und $g(z) = (z - a)v(z)$. Nach der Produktregel ist dann

$$g'(a) = v(a) + (z - a)|_{z=a}v'(a) = v(a).$$

Da $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist, gibt es ein holomorphes $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(a) + (z - a)u(z).$$

Man entwickle f dazu etwa in eine Potenzreihe um a und setze dann bei $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - a)^n$ um a : $u(z) := \sum_{n=1}^\infty a_n(z - a)^{n-1}$. Dann ist

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a) + (z - a)u(z)}{(z - a)v(z)} = \frac{f(a)/v(z)}{z - a} + \frac{u(z)}{v(z)}.$$

Schließlich ist $1/v(z)$ wegen $v(a) \neq 0$ lokal um $z = a$ holomorph, also in eine Potenzreihe entwickelbar,

$$\frac{1}{v(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^k,$$

wobei $b_0 = 1/v(a) = 1/g'(a)$ ist. Das ergibt

$$\begin{aligned} h(z) &= \left(f(a) \left(\frac{1}{v(a)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^k \right) \right) \cdot \frac{1}{z-a} + \frac{u}{v}(z) \\ &= \frac{f(a)/g'(a)}{z-a} + \left\{ (f(a) \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-a)^{k-1}) + \frac{u}{v}(z) \right\}, \end{aligned}$$

wobei der Ausdruck in den geschweiften Klammern holomorph ist. Das zeigt, dass h in a einen einfachen Pol mit Residuum

$$\text{Res}_a(h) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

hat (falls $f(a) \neq 0$ ist; im Falle $f(a) = 0$ ist die Singularität hebbar).

(b) (i) Die isolierten Singularitäten von $f: z \mapsto 1/(z(z-\pi)^2)$ liegen offenbar bei $a = 0$ und $b = \pi$. Um $a = 0$ ist u mit $u(z) = 1/(z-\pi)^2$ holomorph mit $u(0) = 1/(-\pi)^2 = 1/\pi^2$. Also ist um $z = 0$

$$\frac{1}{(z-\pi)^2} = \frac{1}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

mit $b_k \in \mathbb{C}$. Es folgt:

$$\frac{1}{z(z-\pi)^2} = \frac{1/\pi^2}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k-1}$$

um z . Also hat f in a einen einfachen Pol mit Residuum $1/\pi^2$. Bei $b = \pi$ ist $z \mapsto 1/z$ um b herum holomorph mit Taylordarstellung

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{b} + \frac{d}{dz} \Big|_{z=b} \left(\frac{1}{z} \right) \cdot (z-\pi) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z-\pi)^k$$

(mit $c_k \in \mathbb{C}$ für $k \geq 2$). Wegen $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} \right) \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{\pi^2}$ ist daher

$$\frac{1}{z(z-\pi)^2} = \frac{1/\pi}{(z-\pi)^2} + \frac{-1/\pi^2}{z-\pi} + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (z-\pi)^{k-2}.$$

Es hat also f einen Pol der Ordnung 2 in b und dort das Residuum

$$\text{Res}_\pi(f) = -\frac{1}{\pi^2}.$$

(ii) Die isolierten Singularitäten von $g: z \mapsto 1/(z(e^z - 1))$ liegen bei $a = 0$ und $b_k = 2\pi i k$ ($k \in \mathbb{Z}$), denn $e^z - 1 = 0$, genau wenn $z = 2\pi i k$ ist, für ein $k \in \mathbb{Z}$. Wir versuchen mal mit $f(z) = 1/z$ und $h(z) = e^z - 1$ Teil (a) der Aufgabe anzuwenden. Dann ist zunächst $b_k = 2\pi i k$ (für $k \neq 0$) einfache Nullstelle von h , denn

$$h'(b_k) = e^{b_k} = 1 \neq 0.$$

Es folgt:

$$\operatorname{Res}_{b_k}(g) = \frac{f(b_k)}{h'(b_k)} = \frac{1/b_k}{1} = \frac{1}{2\pi i k},$$

für $k \neq 0$. In $a = b_0$ hat der Nenner von g eine zweifache Nullstelle, denn

$$\begin{aligned} z(e^z - 1) &= z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^{k+2} \\ &= z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k = z^2 \cdot u(z), \end{aligned}$$

wenn wir

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k$$

setzen, also insbesondere $u(0) = 1$ und $u'(0) = 1/2! = 1/2$. Nun entwickeln wir wieder $1/u$ bis zur Ordnung 1,

$$\frac{1}{u(z)} = \frac{1}{u(0)} + \frac{d}{dz} \Big|_{z=0} \left(\frac{1}{u(z)} \right) \cdot z + \dots = 1 + \left(-\frac{u'(0)}{u(0)^2} \right) \cdot z + \dots = 1 - \frac{1}{2}z + \dots,$$

und das liefert

$$\frac{1}{z(e^z - 1)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{u(z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \text{hol.}$$

Das Residuum von g in 0 ist also

$$\operatorname{Res}_0(g) = -\frac{1}{2}.$$

Aufgabe 24. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad (\text{für } a > 1).$$

(Hinweis für das zweite Integral: Versuchen Sie dieses Integral als ein komplexes Wegeintegral über die Einheitskreislinie zu beschreiben.)

Lösungsvorschlag. (i) Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx / (1+x^4)$ kann man ähnlich wie in der Vorlesung behandeln. Man ergänzt den Weg $[-r, r] \subseteq \mathbb{R}$ (für $r > 1$) um den Halbkreisbogen $\gamma_r: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ und erhält dann den Rand des Kompaktums mit stückweise glattem Rand

$$K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, \operatorname{Im} z \geq 0\}.$$

Entlang des Weges γ_r kann man den Integrand $z^2/(1+z^4)$ so abschätzen:

$$\left| \frac{z^2}{1+z^4} \right| = \frac{|z|^2}{|1+z^4|} \leq \frac{r^2}{r^4 - 1},$$

denn

$$r^4 = |z^4| = |z^4 + 1 - 1| \leq |z^4 + 1| + 1,$$

also

$$|z^4 + 1| \geq r^4 - 1.$$

Die Länge von γ_r ist πr , so dass mit der Fundamentalabschätzung

$$\left| \int_{\gamma_r} \frac{z^2 dz}{1 + z^4} \right| \leq \sup_{z \in \text{Sp}(\gamma_r)} \left| \frac{z^2}{1 + z^4} \right| \cdot L[\gamma_r] \leq \frac{\pi r^3}{r^4 - 1},$$

so dass der Beitrag für $r \rightarrow \infty$ also verschwindet. Es ist deshalb

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial K_r} \frac{z^2 dz}{1 + z^4}.$$

Um den Residuensatz anzuwenden, kümmern wir uns nun um die isolierten Singularitäten von $z \mapsto z^2/(1 + z^4)$. Das sind die Nullstellen des Nenners, also die Lösungen von

$$z^4 = -1.$$

Bezeichnen wir mit $\omega := \exp(\pi i/4)$ die 8. Einheitswurzel, so sind die Lösungen offenbar gerade ω , ω^3 , ω^5 und ω^7 , denn

$$(\omega^{2k+1})^4 = \omega^{8k+4} = (\omega^8)^k \cdot \omega^4 = 1^k \cdot (-1) = -1$$

(für alle $k \in \mathbb{Z}$). Der Nenner zerfällt also in die Linearfaktoren

$$1 + z^4 = (z - \omega)(z - \omega^3)(z - \omega^5)(z - \omega^7).$$

Von diesen vier Wurzeln der Gleichung $1 + z^4 = 0$ haben nur ω und ω^3 positiven Imaginärteil und fallen damit in K_r (für r groß genug, hier $r > 1$). Für $r > 1$ ist das Integral unabhängig von r , so dass man auch zum Lines für $r \rightarrow \infty$ übergehen kann. Wir erhalten dann also mit dem Residuensatz

$$I = 2\pi i(\text{Res}_{\omega}(f) + \text{Res}_{\omega^3}(f)),$$

wenn wir $f(z) = z^2/(1 + z^4)$ setzen. Nun ist offenbar, dass f in ω und ω^3 nur einfache Pole hat mit

$$\text{Res}_{\omega}(f) = \frac{\omega^2}{(\omega - \omega^3)(\omega - \omega^5)(\omega - \omega^7)}$$

und

$$\text{Res}_{\omega^3}(f) = \frac{\omega^6}{(\omega^3 - \omega)(\omega^3 - \omega^5)(\omega^3 - \omega^7)}.$$

Da

$$\omega = e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

ist, ist

$$\begin{aligned} \omega^3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \\ \omega^5 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\omega, \\ \omega^7 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\omega^3, \end{aligned}$$

und damit

$$\omega - \omega^3 = \sqrt{2}, \quad \omega - \omega^5 = 2\omega, \quad \omega - \omega^7 = i\sqrt{2}$$

sowie

$$\omega^3 - \omega^5 = i\sqrt{2}, \quad \omega^3 - \omega^7 = 2\omega^3.$$

Das ergibt mit $\omega^2 = i$ und $\omega^6 = -i$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_\omega(f) &= \frac{i}{(\sqrt{2})(2\omega)(i\sqrt{2})} = \frac{1}{4\omega}, \\ \operatorname{Res}_{\omega^3}(f) &= \frac{-i}{(-\sqrt{2})(i\sqrt{2})(2\omega^3)} = \frac{1}{4\omega^3}. \end{aligned}$$

Wegen $1/\omega = \omega^7$ wird also

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_\omega(f) + \operatorname{Res}_{\omega^3}(f) &= \frac{1}{4\omega} + \frac{1}{4\omega^3} = \frac{1}{4\omega} \left(1 + \frac{1}{\omega^2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)(1 - i) \\ &= \frac{1}{8} \left((\sqrt{2} - \sqrt{2}) + i(-\sqrt{2} - \sqrt{2})\right) = \frac{-2\sqrt{2} \cdot i}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}i. \end{aligned}$$

Das liefert also schließlich

$$I = 2\pi i \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(ii) Um das Integral als ein Integral über das Intervall $[0, 2\pi]$ zu beschreiben, bemerken wir zunächst die Symmetrie des Cosinusgraphen bzgl. der vertikalen Geraden $\{x = 0\}$ und $\{x = \pi\}$, d.i.:

$$\cos(-x) = \cos(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Daraus sieht man mit den Substitutionen $x = \pi - u$ bzw. $u = -v$, dass

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} &= \int_0^{-\pi} \frac{-du}{a + \cos(\pi - u)} = \int_0^{-\pi} \frac{-du}{a + \cos(u)} = \int_0^\pi \frac{dv}{a + \cos(-v)} \\ &= \int_0^\pi \frac{dv}{a + \cos v}. \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}.$$

Nun versuchen wir dieses Integral als ein komplexes Wegintegral über die Einheitskreislänge $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{it}$, zu schreiben und rechnen ein bisschen „physikalisch“:

$$z = \gamma(t) = e^{it} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \dot{\gamma}(t) = ie^{it} = iz \Rightarrow dt = \frac{1}{i} \frac{dz}{z}.$$

Mit

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

erhalten wir

$$\frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{i} \cdot \frac{dz}{\left(a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \cdot z} = \frac{2}{i} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Insgesamt bekommen wir so, dass

$$J := \int_0^\pi \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{i} \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Wem das zu „unheimlich“ ist, der setze jetzt die Definition des komplexen Wegintegrals für $\int_\gamma dz/(z^2 + 2az + 1)$ ein, um zu sehen, dass man tatsächlich J bekommt.

Jetzt bestimmen wir die isolierten Singularitäten von $f: z \mapsto 1/(z^2 + 2az + 1)$, welche nach der Mitternachtsformel bei

$$\omega_{1/2} = -\frac{2a}{2} \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

liegen. Nur die Wurzel

$$\omega_1 := -a + \sqrt{a^2 - 1}$$

liegt dabei in $B_1(0)$, denn einerseits ist offenbar $\omega_1 < 0$, andererseits ist wegen $a > 1$

$$a - 1 = \sqrt{a^2 - 2a + 1} < \sqrt{a^2 - 2 + 1} = \sqrt{a^2 - 1}$$

auch $\omega_1 > -1$. Die andere Nullstelle liegt außerhalb von $B_1(0)$. Das Residuum von f in ω_1 ist dann

$$\text{Res}_{\omega_1}(f) = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

denn

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{1}{(z - \omega_1)(z - \omega_2)}.$$

Also erhalten wir mit dem Residuensatz

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t} = \frac{1}{i} \int_{\partial B_1(0)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} \\ &= \frac{1}{i} (2\pi i) \cdot \text{Res}_{\omega_1}(f) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \end{aligned}$$

Aufgabe 25 (Null- und Polstellenzähler). **(a)** Sei f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in G$ eine Nullstelle von f der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass g , mit $g(z) = f'(z)/f(z)$, eine holomorphe Funktion auf G mit einer isolierten Singularität in a ist und es gilt: $\text{Res}_a(g) = k$.

(b) Sei f nun holomorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit einem Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in einem Punkt $a \in G$. Zeigen Sie, dass g , mit $g = f'/f$, holomorph mit isolierter Singularität in a ist und es gilt: $\text{Res}_a(g) = -k$.

(c) Eine holomorphe Funktion f auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie höchstens isolierte Singularitäten hat und diese nicht wesentlich sind. Sei nun $K \subseteq G$ Kompaktum mit glattem Rand, f sei meromorph auf G und keine der isolierten Singularitäten und Nullstellen von f liege auf ∂K . Mit $N_0 \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir dann die Gesamtzahl der Nullstellen von f innerhalb von K , gewichtet jeweils mit ihren Vielfachheiten, $N_0 = \sum_{a \in f^{-1}(0)} \text{ord}_a(f)$. Ähnlich sein $N_\infty \in \mathbb{N}$ die Gesamtzahl der Polstellen von f innerhalb von K , gewichtet mit ihren Vielfachheiten, $N_\infty = \sum_{a \in f^{-1}(\infty)} \text{ord}_a(f)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = N_0 - N_\infty.$$

Lösungsvorschlag. (a) Die isolierten Singularitäten von $g = \frac{f'}{f}$ auf G sind offenbar die Nullstellen von f , wovon $a \in G$ eine ist. Dass $\text{ord}_a(f) = k \in \mathbb{N}$ ist, impliziert, dass es ein holomorphes h um a mit $h(a) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - a)^k h(z)$$

dort gibt. Es folgt

$$f'(z) = k(z - a)^{k-1} h(z) + (z - a)^k h'(z)$$

um a , also

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - a)^{k-1} h(z)}{(z - a)^k h(z)} + \frac{(z - a)^k h'(z)}{(z - a)^k h(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Da $h(a) \neq 0$ ist, ist $\frac{h'}{h}$ um a holomorph und damit hat g in a einen einfachen Pol mit Residuum

$$\text{Res}_a(g) = k.$$

(b) f habe nun einen Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in a . Das impliziert, dass es ein holomorphes h um a mit $h(a) \neq 0$ gibt und

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)^k} h(z).$$

Das kann man beispielsweise aus der Laurententwicklung von h in a sehen, die so aussieht:

$$L_{h,a}(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - a)^n = (z - a)^{-k} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_{-k+n} (z - a)^n.$$

und $a_{-k} \neq 0$. Setzt man $h(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{-k+n} (z - a)^n$ (um a), so ist also $h(a) = a_{-k} \neq 0$ und

$$f(z) = L_{h,a}(z) = (z - a)^{-k} h(z),$$

für alle $z \in B_r(a) \setminus \{a\}$, für ein $r > 0$. Es folgt:

$$f'(z) = (-k) \cdot (z - a)^{-k-1} h(z) + (z - a)^{-k} h'(z)$$

und so ähnlich wie eben (man könnte die Teile (a) und (b) gemeinsam abhandeln)

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(-k)(z - a)^{-k-1} h(z)}{(z - a)^{-k} h(z)} + \frac{(z - a)^{-k} h'(z)}{(z - a)^{-k} h(z)} = \frac{-k}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Es folgt wiederum, dass g einen einfachen Pol in a mit Residuum

$$\text{Res}_a(g) = -k$$

hat.

(c) Um das Integral für den Null- und Polstellenzähler für ein meromorphes f auf einem Gebiet G zu bekommen, stellen wir zunächst fest, dass $g = \frac{f'}{f}$ isolierte Singularitäten in den Nullstellen von f und den Polstellen von f hat, aber außerhalb dieser holomorph ist, da f und f' dort holomorph sind und es keine Nullstellen von f mehr dort gibt. Ist nun $K \subseteq G$ ein Kompaktum

mit glattem Rand, so können, weil die Null- und Polstellen von f diskret liegen, nur jeweils endlich viele in K liegen. Denn ist $D \subseteq K$ die Teilmenge der Null- und Polstellen in K , so ist $(K \setminus D, B_\varepsilon(p))_{p \in D}$ eine offene Überdeckung von K (beachte: D ist nach Definition einer diskreten Menge auch abgeschlossen, was in der Vorlesung vergessen wurde). Ist $\varepsilon > 0$ so klein, dass in $B_\varepsilon(p)$ jeweils nur ein Element von D liegt (nämlich p), so sieht man, dass, wegen der Kompaktheit von K , die Teilmenge D endlich sein muss. Seien daher

$$D_0 = \{a_1, \dots, a_r\}$$

die Nullstellen von f in K und

$$D_\infty = \{b_1, \dots, b_s\}$$

die Polstellen von f in K , also $D = D_0 \dot{\cup} D_\infty$. Da nach Voraussetzung $D \cap \partial K = \emptyset$ ist, können wir nun den Residuensatz auf das meromorphe $g = \frac{f'}{f}$ anwenden und finden, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) dz}{f(z)} &= \sum_{p \in D} \operatorname{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) = \sum_{p \in D_0} \operatorname{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) + \sum_{p \in D_\infty} \operatorname{Res}_p\left(\frac{f'}{f}\right) \\ &= \sum_{p \in D_0} \operatorname{ord}_p(f) + \sum_{p \in D_\infty} (-\operatorname{ord}_p(f)) = N_0 - N_\infty. \end{aligned}$$

Aufgabe 26 (Satz von Rouché). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $N(f), N(g) \in \mathbb{N}$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen von f bzw. g in K (gezählt mit Vielfachheiten). Schließlich gelte für alle $z \in \partial K$:

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt: $N(f) = N(g)$. (Hinweis: Betrachten Sie die Homotopie $(h_t)_{t \in [0,1]}$ mit $h_t = f + t(g - f)$ und untersuchen Sie $N(h_t)$ in Abhängigkeit von t .)

Lösungsvorschlag. Wegen $|g - f| < |f|$ auf ∂K , kann weder f noch g eine Nullstelle auf ∂K haben. In so einem Punkt würde nämlich bei $f(z) = 0$ folgen: $|g(z)| < 0$ bzw. bei $g(z) = 0$: $|f(z)| < |f(z)|$. Alle Nullstellen von f bzw. g in K liegen also in $\overset{\circ}{K}$. Das Gleiche gilt für die „Zwischenfunktionen“ $h_t: G \rightarrow \mathbb{C}$ ($t \in [0, 1]$),

$$h_t(z) = f(z) + t(g(z) - f(z)).$$

Wegen

$$t \cdot |g(z) - f(z)| \leq |g(z) - f(z)| < |f(z)|,$$

für alle $t \in [0, 1]$ und $z \in \partial K$, hat auch h_t keine Nullstellen auf ∂K . Beachte, dass $h_0 = f$ und $h_1 = g$ ist. Für die Anzahl $N(h_t) \in \mathbb{Z}$ der Nullstellen von h_t (mit Vielfachheiten gezählt) gilt deshalb nach Aufgabe-25:

$$N(h_t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{h'_t(z) dz}{h_t(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z) + t(g'(z) - f'(z))}{f(z) + t(g(z) - f(z))} dz.$$

Der Integrand dieses Integrals hängt nun offenbar stetig von t ab und daher auch $N(t) := N(h_t)$. Aber $N: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ hat ganzzahlige Werte und muss daher konstant sein (vgl. Aufgabe-13). Es ist also

$$N(f) = N(0) = N(1) = N(g).$$

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein *dynamisches System auf G* ist ein stetig differenzierbares $\varphi: \Omega \rightarrow G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, wobei gilt:

- (a) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$ ist offen mit $\{0\} \times G \subseteq \Omega$ und $I(x) := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in \Omega\}$ ist ein offenes Intervall;
- (b) (i) $\varphi^0(x) = x$ für alle $x \in G$;
(ii) Ist $(t, x) \in \Omega$, so ist für $s \in \mathbb{R}$ das Paar $(t + s, x) \in \Omega$, genau wenn $(s, \varphi^t(x)) \in \Omega$ ist, und es gilt dann:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Man nennt dann für jedes $x \in G$ die Kurve $\varphi(x): I(x) \rightarrow G$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, die *Dynamik von x* .

Aufgabe 27. Sei $\varphi: \Omega \rightarrow G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Man definiert das zugehörige Vektorfeld $f = f_\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf G durch

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^t(x).$$

Zeigen Sie: Für jedes $x_0 \in G$ löst die Kurve $\varphi(x_0): I(x_0) \rightarrow G$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Lösungsvorschlag. Wir haben zu zeigen, dass für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt:

$$\frac{d\varphi^t}{dt}(x) = f(\varphi^t(x)),$$

nicht nur für $t = 0$. Dazu benutzen wir die „Flussgleichung“

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x),$$

für alle $(t, x) \in \Omega$ und $s \in I(\varphi^t(x))$. Es ist nämlich

$$\frac{d\varphi^t}{dt}(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi^{t+s}(x) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi^s(\varphi^t(x)) = f(\varphi^t(x)).$$

Wegen $\varphi^0(x) = x$ löst daher $\varphi(x_0): I(x_0) \rightarrow G$, $t \mapsto \varphi^t(x_0)$, das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0,$$

für jedes $x_0 \in G$.

Aufgabe 28. Sei $\varphi: \Omega \rightarrow G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $a \in G$ heißt *Gleichgewichtslage von φ* , wenn für alle $t \in I(a)$ gilt: $\varphi^t(a) = a$.

(a) Zeigen Sie: Ist $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ das zu φ gehörende Vektorfeld, so gilt: $a \in G$ ist genau dann Gleichgewichtslage von φ , wenn $f(a) = 0$ ist. [Nachtrag: Benutzen Sie für die Rückrichtung, dass φ 2-mal stetig differenzierbar und damit f lokal Lipschitz-stetig ist sowie die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems dann nach Picard Lindelöf.]

(b) Sei nun $x_0 \in G$ mit $I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$ und $t_+(x_0) = \infty$. Weiter sei $a \in G$ und es gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^t(x_0) = a.$$

Zeigen Sie, dass a eine Gleichgewichtslage von φ sein muss.

Lösungsvorschlag. (a) Ist $a \in G$ Gleichgewichtslage, so ist also $\varphi(a): I(a) \rightarrow G$ durch $\varphi^t(a) = a$, für alle $t \in I(a)$. Es folgt, dass

$$f(a) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi^t(a) = 0$$

ist. Umgekehrt wollen wir (mit dem Nachtrag) benutzen, dass φ 2-mal stetig differenzierbar und damit f stetig differenzierbar, insbesondere also lokal Lipschitz-stetig, ist und damit der Eindeutigkeitssatz (samt dem Lemma aus der Vorlesung, dass zwei Lösungen des (AWP) auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsintervalle übereinstimmen) von Picard-Lindelöf gilt. Ist nämlich dann $f(a) = 0$, so löst die Kurve $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$, $\alpha(t) = a$, das (AWP) $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = a$ auf G , genauso wie nach Aufgabe-27 die Kurve $\varphi(a): I(a) \rightarrow G$. daher muss

$$\varphi(a) = \alpha|_{I(a)}$$

sein. Es ist also a Gleichgewichtslage von φ .

(b) Für jedes $s \in \mathbb{R}$ ist $G_s := \{x \in G : s \in I(x)\} \subseteq G$ offen und $\varphi^s: G_s \rightarrow G$, $x \mapsto \varphi^s(x)$, ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild (welches gerade G_{-s} ist, mit Inversem φ^{-s} wegen der Flussgleichung $\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}$, für alle $s, t \in \mathbb{R}$). Insbesondere ist φ^s stetig. Sei nun $s \in I(a)$ beliebig. Dann können wir ein $\tau \in \mathbb{R}$ wählen, so dass $s \in (t_-(x_0) - \tau, \infty)$ ist. Im folgenden betrachten wir nun $t \in (\tau, \infty)$ und können jeweils den Limes für $t \rightarrow \infty$ bilden. Nach Voraussetzung ist zunächst $\varphi^t(x_0) \rightarrow a$ und damit auch $\varphi^{s+t}(x_0) \rightarrow a$ (bei festem s und für $t \rightarrow \infty$). Wegen der Stetigkeit von φ^s und erneut der Flussgleichung ist deshalb

$$\varphi^s(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^s(\varphi^t(x_0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^{s+t}(x_0) = a.$$

Das zeigt, dass a eine Gleichgewichtslage ist.

Aufgabe 29. Wir betrachten das (nur) stetige Vektorfeld $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, auf \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

auf \mathbb{R} verschiedene Lösungen $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat.

Lösungsvorschlag. Das (AWP) $\dot{x} = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$, hat zunächst mal sicher die Lösung $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(t) = 0$, denn $\alpha(0) = 0$ und

$$\dot{\alpha}(t) = 0 = \sqrt{|\alpha(t)|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Für $t > 0$ (und $x > 0$) rechnen wir mit Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{x}} &= dt, \\ \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{y}} &= \int_0^t ds \Rightarrow 2\sqrt{y}|_0^x = s|_0^t \Rightarrow 2\sqrt{x} = t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{4}t^2. \end{aligned}$$

Und nun prüfen wir zur Sicherheit noch mal nach, dass $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t^2 & \text{für } t > 0 \end{cases},$$

stetig differenzierbar ist mit $\beta(0) = 0$, $\dot{\beta}(t) = 0 = \sqrt{|\beta(t)|}$ für $t \leq 0$ und

$$\dot{\beta}(t) = \frac{1}{2}t = \sqrt{|\beta(t)|} \quad \text{für } t > 0,$$

also wirklich eine Lösung von (AWP) ist. Offenbar ist aber $\alpha \neq \beta$.

Aufgabe 30. Bestimmen Sie mit der Methode der Trennung der Variablen alle maximalen Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2$$

und skizzieren Sie das Phasendiagramm auf \mathbb{R} .

Lösungsvorschlag. Es ist also (zunächst für $x_0 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x^2 &\Rightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dy}{y^2} = \int_0^t ds \\ \Rightarrow -\frac{1}{y} \Big|_{x_0}^x = s \Big|_0^t &\Rightarrow -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \Rightarrow -\frac{1}{x} = t - \frac{1}{x_0} = \frac{tx_0 - 1}{x_0} \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \end{aligned}$$

und diese Formel können wir auch für $x_0 = 0$ nehmen, wo x_0 natürlich eine Gleichgewichtslage ist. Um nun die maximalen Definitionsgebiete bzw. das maximale dynamische System zu dieser gewöhnlichen Differentialgleichung und damit das Phasendiagramm auf \mathbb{R} zu ermitteln, unterscheiden wir die Bedingungen $x_0 < 0$, $x_0 = 0$ und $x_0 > 0$. Im Falle $x_0 < 0$ ist nun offenbar das maximale Definitionsintervall gerade $I(x_0) = (\frac{1}{x_0}, \infty)$ und für die Lösungskurve gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Nur für $x_0 = 0$ ist das Definitionsintervall die ganzen reellen Zahlen, $I(x_0) = \mathbb{R}$, und $x(t) = 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$ (Gleichgewichtslage). Im Falle $x_0 > 0$ schließlich ist $I(x_0) = (-\infty, 1/x_0)$ und

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 1/x_0} x(t) = \infty.$$

Es gibt damit im Phasenraum \mathbb{R} (bis auf Reparametrisierungen) genau drei Bahnen:

- eine, die in positiver Richtung über die negativen Zahlen läuft (und in endlicher Zeit aus $-\infty$ kommt):
- eine Gleichgewichtslage in $x_0 = 0$;

- und eine, die die in positiver Richtung über die positiven Zahlen läuft (und in endlicher Zeit in $+\infty$ ist).

Aufgabe 31. Sei $n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf G . Sei ferner für jedes $y \in G$ mit $\alpha_y: I(y) \rightarrow G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y$$

auf G notiert. Sei nun $y_0 \in G$ und $t \in I(y_0)$ sowie $y_1 = \alpha_{y_0}(t)$. Zeigen Sie, dass $s \in I(y_1)$ ist, genau wenn $t + s \in I(y_0)$ ist und dann gilt:

$$\alpha_{y_1}(s) = \alpha_{y_0}(s + t).$$

Lösungsvorschlag. Wir betrachten die beiden Kurven

$$\alpha: I(y_1) \rightarrow G, \quad \alpha(s) = \alpha_{y_1}(s),$$

und

$$\beta: (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) - t) \rightarrow G, \quad \beta(s) = \alpha_{y_0}(s + t).$$

Hierbei ist $I(y_0) = (t_-(y_0), t_+(y_0))$ mit $t_-(y_0) \in [-\infty, 0)$ und $t_+(y_0) \in (0, \infty]$ und wir setzen natürlich $-\infty - t := -\infty$ bzw. $+\infty - t := +\infty$, für $t \in \mathbb{R}$. Beide Kurven lösen nun das Anfangswertproblem (AWP)

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y_1$$

auf G , denn bei α ist das gerade die Definition von α_{y_1} und bei β gilt zunächst $\beta(0) = \alpha_{y_0}(t) = y_1$ und dann

$$\beta'(s) = \frac{d}{ds} \alpha_{y_0}(s + t) = \frac{d}{d\sigma} \Big|_{\sigma=s+t} \alpha_{y_0}(\sigma) = f(\alpha_{y_0}(s + t)) = f(\beta(s)),$$

für alle $s \in (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) - t)$. Weiterhin sind beide Lösungen maximal. Bei α ist dies nach Definition von α_{y_1} so, bei β nach Definition von α_{y_0} , da β im Parameterintervall nur um t verschoben wurde. Daher muss

$$I(y_1) = (t_-(y_0) - t, t_+(y_0) + t)$$

sein, also $s \in I(y_1)$ genau wenn $s + t \in I(y_0)$ ist. Denn nach dem Satz von Picard-Lindelöf (genauer dem daraus folgenden Lemma aus der Vorlesung) folgt, dass α und β auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen, aber da diese jeweils maximal sind, müssen auch die Definitionsbereiche übereinstimmen und damit ist also $\alpha = \beta$.

Aufgabe 32. Für $\omega > 0$ bezeichnet man das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0$$

als „harmonischen Oszillator“. Bestimmen Sie den Phasenraum G für das Problem und dann das zugehörige maximale dynamische System $\varphi: \Omega \rightarrow G$ (Hinweis: Machen Sie einen „Ansatz“ für x als Linearkombination der Lösungen $t \mapsto \cos(\omega x)$ und $t \mapsto \sin(\omega x)$.)

Lösungsvorschlag. Der Phasenraum für den (1-dimensionalen) harmonischen Oszillator mit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= -\omega^2 x, & y(0) &= y_0,\end{aligned}$$

ist offenbar $G = \mathbb{R}^2$. Wir wissen schon, dass die beiden trigonometrischen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \cos(\omega t)$ und $t \mapsto \sin(\omega t)$ die Differentialgleichung lösen und die Differentialgleichung ist linear, d.i.: das Vektorfeld $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = (y, -\omega^2 x)$$

ist linear. woraus folgt, dass jede Linearkombination $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

auch eine Lösung ist. Denn erfüllen zwei Kurven β_1, β_2 die Gleichung, so gilt für eine Linearkombination $\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2$ wegen der Linearität von f

$$\frac{d}{dt}(\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2)(t) = \lambda_1 \dot{\beta}_1(t) + \lambda_2 \dot{\beta}_2(t) = \lambda_1 f(\beta_1(t)) + \lambda_2 f(\beta_2(t)) = f(\lambda_1 \beta_1(t) + \lambda_2 \beta_2(t)).$$

Wir versuchen nun $A, B \in \mathbb{R}$ so einzustellen, dass wir die Anfangsbedingungen $\alpha(0) = x_0$ und $\dot{\alpha}(0) = y_0$ erfüllen. Es ist

$$\dot{\alpha}(t) = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t),$$

also

$$\alpha(0) = A, \quad \dot{\alpha}(0) = B\omega.$$

Es folgt, dass

$$\alpha(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

die maximale Lösung des (AWP) ist. Da damit $I(x, y) = \mathbb{R}$ ist, für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ist hier $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$ und das zugehörige (maximale) dynamische System auf G gegeben durch

$$\varphi^t(x, y) = (x \cos(\omega t) + \frac{y}{\omega} \sin(\omega t), -x\omega \sin(\omega t) + y \cos(\omega t)).$$

Aufgabe 33. Sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu $x_0 \in G$ sein $\alpha: I \rightarrow G$ die maximale Lösungskurve zum Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ auf G . Es existiere nun ein $T \in I$ mit $T > 0$, so dass $\alpha(T) = x_0$ ist. (Wenn $T > 0$ die kleinste positive reelle Zahl mit dieser Eigenschaft ist, nennen wir x_0 einen *periodischen Punkt der Periode T* .) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $I = \mathbb{R}$ ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha(t + T) = \alpha(t).$$

Lösungsvorschlag. Da für das maximale $\alpha = \alpha_{x_0}: I(x_0) \rightarrow G$ wegen $\alpha(T) = x_0$ für ein $T > 0$ ist, gilt nach Aufgabe-31, dass

$$t_-(x_0) = t_-(x_0) - T, \quad t_+(x_0) = t_+(x_0) - T$$

ist, was man nur mit $t_-(x_0) = -\infty$ und $t_+(x_0) = +\infty$ erfüllen kann. Nach der Flussbedingung aus Aufgabe-31 muss dann für alle $t \in \mathbb{R} = I(x_0)$ gelten:

$$\alpha(t+T) = \alpha_{x_0}(t+T) = \alpha_{\alpha(T)}(t) = \alpha_{x_0}(t) = \alpha(t).$$

Aufgabe 34. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi: \Omega \rightarrow G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, ein dynamisches System auf G sowie $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sein zugehöriges Vektorfeld. Eine stetig differenzierbare Funktion $H: G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ein 1. Integral für φ , wenn für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt: $H(\varphi^t(x)) = H(x)$. Zeigen Sie, dass H genau dann ein 1. Integral ist, wenn die Ableitung $X_f H: G \rightarrow \mathbb{R}$ von H in Richtung f , d.i.

$$X_f H(x) := \sum_{j=1}^n f_j(x) \frac{\partial H}{\partial x_j}(x),$$

verschwindet, $X_f H = 0$.

Lösungsvorschlag. „ \Rightarrow “: Sei also $H: G \rightarrow \mathbb{R}$ ein 1. Integral für $\varphi: \Omega \rightarrow G$ (mit $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$). Dann ist bei festem $x \in G$ für alle $t \in I(x)$:

$$H(\varphi^t(x)) = H(x).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert dann mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} H(\varphi^t(x)) \right|_{t=0} = \langle \text{grad}(H)(\varphi^0(x)), \left. \frac{d}{dt} \varphi^t(x) \right|_{t=0} \rangle = \langle \text{grad}(H)(x), f(x) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_j}(x) \cdot f_j(x). \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “: Ist umgekehrt $X_f H = 0$, so schließen wir

$$\frac{d}{dt} H(\varphi^t(x)) = \langle \text{grad}(H)(\varphi^t(x)), \frac{d\varphi^t}{dt}(x) \rangle = \langle \text{grad}(H), f \rangle(\varphi^t(x)) = X_f H(\varphi^t(x)) = 0,$$

für alle $x \in G$ und $t \in I(x)$. Deshalb muss für festes $x \in G$ das stetig differenzierbare $I(x) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto H(\varphi^t(x))$, konstant sein, also überall gleich seinem Wert bei $t = 0 \in I(x_0)$, d.i.

$$H(\varphi^t(x)) = H(\varphi^0(x)) = H(x).$$

Es ist damit H ein 1. Integral für φ .

Aufgabe 35. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a_1, \dots, a_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n . Ordnung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{x} + a_n x = 0 \tag{1}$$

auf \mathbb{R} .

(a) Zeigen Sie, dass der Lösungsraum $L_{(n)} := \{x \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) : x \text{ löst (1)}\}$ ein n -dimensionaler Untervektorraum von $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ist.

(b) Seien $x_1, \dots, x_n \in L_{(h)}$. Dann bilden wir die sogenannte *Wronski-Determinante* von (x_1, \dots, x_n) $W: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{pmatrix} (t).$$

Zeigen Sie: Falls W eine Nullstelle hat, so ist W schon überall Null und es gilt: (x_1, \dots, x_n) ist Basis von $L_{(h)}$, genau wenn $W \neq 0$ ist.

Lösungsvorschlag. (a) Um die lineare Gleichung n . Ordnung (1) zu lösen, betrachten wir das System (1')

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_1 x_n - a_2 x_{n-1} - \cdots - a_{n-1} x_2 - a_n x_1 \end{aligned}$$

1. Ordnung auf \mathbb{R}^n . Dann erhalten wir einen Lösungsraum $\tilde{L}_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ von (1'). Bezeichnen wir mit $\pi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die Projektion auf die 1. Komponente, $x \mapsto x_1$, so induziert dies eine Projektion

$$\pi_1^*: \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto \pi_1 \circ \varphi.$$

Wir wissen bereits, dass $\tilde{L}_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^n)$ ein n -dimensionaler Unterraum ist und π_1^* den Lösungsraum $\tilde{L}_{(h)}$ bijektiv auf $L_{(h)}$ abbildet. Jetzt zeigen wir zunächst, dass $L_{(h)}$ sogar Teilmenge von $\mathcal{C}^n(I; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ ist, denn $x_2, \dots, x_n \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ und

$$x_2 = \dot{x}_1, \dots, x_n = x_1^{(n-1)},$$

und damit ist wegen $x_1^{(n-1)} \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R})$ auch $x \in \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$. Da π_1^* linear ist, ist $\text{im}(\pi_1^*) \subseteq \mathcal{C}^n(I; \mathbb{R})$ ein Untervektorraum. Schließlich ist $\pi_1^*|_{\tilde{L}_{(h)}}$ injektiv, denn ist $x_1 = \pi_1^*(x) = 0$, so ist auch

$$x_2 = \dot{x}_1 = 0, \dots, x_n = x_1^{(n-1)} = 0,$$

also $x = 0$. Daraus folgt, dass auch $L_{(h)} = \text{im}(\pi_1^*)$ Dimension n hat.

(b) Seien nun $x_1, \dots, x_n \in L_{(h)}$. Wir betrachten dann die zugehörigen Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \tilde{L}_{(h)}$ mit

$$\varphi_j = (x_j, \dot{x}_j, \dots, x_j^{(n-1)}), \quad (j = 1, \dots, n).$$

Nun ist (x_1, \dots, x_n) genau dann linear unabhängig, wenn $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ es ist, denn aus

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

folgt durch Differentiation auch

$$\lambda_1 x_1^{(k)} + \cdots + \lambda_n x_n^{(k)} = 0,$$

für $k = 0, \dots, n-1$, also

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_n \varphi_n = 0.$$

Umgekehrt folgt aus $\lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n = 0$ durch Anwenden von π_1^* auch $\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n = 0$. Nun misst die Wronski-Determinante offenbar gerade, ob $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ein Lösungsfundamentalsystem (FDS) für (1') ist und damit ist $W = 0$ schon dann, wenn es eine Nullstelle in I hat. Es ist $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ FDS, genau wenn $W \neq 0$ ist und mit Teil (a) wissen wir, dass $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ Basis von $\tilde{L}_{(h)}$ ist, genau wenn (x_1, \dots, x_n) Basis von $L_{(h)}$ ist.

Aufgabe 36. Die Differentialgleichung der (ungedämpften) erzwungenen Schwingung ist gegeben durch

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

mit Konstanten $\omega_0, \omega, A \in \mathbb{R}_+$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Nicht-Resonanzfall $\omega \neq \omega_0$. (Hinweis: Wenn Sie die Rechnung mit der Variation der Konstanten vermeiden wollen, versuchen Sie eine spezielle Lösung zu erraten („Ansatz“).)

Lösungsvorschlag. Wir wissen bereits, dass ein (FDS) der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

durch $(\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t))$ gegeben ist, denn beide Funktionen lösen offenbar (2) und ihre Wronski-Determinante verschwindet nicht:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} &= \omega_0 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \\ &= \omega_0 \neq 0. \end{aligned}$$

Um die allgemeine Lösung im *Nicht-Resonanzfall* $\omega \neq \omega_0$ zu bekommen, machen wir den Lösungsansatz

$$\psi(t) = c \cdot \cos(\omega t)$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, die von ω, ω_0, A abhängen mag.

[Bemerkung: Die Vorstellung dabei ist, dass dem System durch die „äußere Kraft“, die durch die Inhomogenität $t \mapsto A \cos(\omega t)$ in das System eingespeist wird, diese Schwingung „aufgezwungen“ wird (mit einer Amplitude c , die sich, je nachdem wie nah die „äußere Frequenz“ ω der „Eigenfrequenz“ ω_0 nahe kommt, durchaus verstärken kann. Alternativ kann man zu einer speziellen Lösung (ohne physikalische Intuition) auch mit der Methode der Variation der Konstanten kommen. Dazu muss man

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \omega_0 \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

invertieren und dann das Integral

$$\int_0^t \Phi^{-1}(s) b(s) ds$$

mit $b(s) = (0, A \cos(\omega s))$, mit partieller Integration berechnen, um auf die variierenden Konstanten $u_1, u_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ für

$$\psi(t) = u_1(t) \cos(\omega_0 t) + u_2(t) \sin(\omega_0 t)$$

zu kommen.]

Wir rechnen hier mit unserem „Ansatz“ zunächst:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\omega c \sin(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{\psi} &= -\omega^2 c \cos(\omega t) \\ \Rightarrow \ddot{\psi} + \omega_0^2 \psi &= -\omega^2 c \cos(\omega t) + \omega_0^2 c \cos(\omega t) \\ &= (-\omega^2 c + \omega_0^2 c) \cos(\omega t),\end{aligned}$$

und das bekommen wir also tatsächlich zu $A \cos(\omega t)$, wenn $-\omega^2 c + \omega_0^2 c = A$, also

$$c = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

ist. Damit ist

$$\psi(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t) + a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

die allgemeine Lösung, wobei man $a, b \in \mathbb{R}$ noch durch die Anfangsbedingungen $\psi(0)$ und $\dot{\psi}(0)$ ausdrücken kann, wenn man möchte.

Aufgabe 37. Sei $n \in \mathbb{N}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ offen sowie $A: I \rightarrow \text{Mat}_n \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $\Phi: I \rightarrow \text{Mat}_n \mathbb{R}$ eine Lösung von $\dot{\Phi} = A\Phi$ auf $\text{Mat}_n \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $\Delta: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \det(\Phi(t))$, die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \text{spur}(A)x$$

löst. (Hinweis: Schreiben Sie $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T$ mit den Zeilen $\varphi_i: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) und benutzen Sie die Produktregel in der Leibnizformel für $\det(\Phi)$ sowie $\dot{\varphi}_i = \sum_j a_{ij} \varphi_j$ ($i = 1, \dots, n$) aus $\dot{\Phi} = A\Phi$.)

Lösungsvorschlag. [Vorbemerkung: Man beachte, dass in der Aufgabenstellung die Spalten von Φ nicht notwendig ein Lösungs-Fundamentalsystem (FDS) von $\dot{x} = Ax$ auf \mathbb{R}^n zu sein brauchen. Die Funktion $\Delta: I \rightarrow \mathbb{R}$, $\Delta = \det(\Phi)$, misst gerade, ob das so ist. Sie ist entweder identisch Null oder hat gar keine Nullstellen. Im letzteren Fall ist Φ dann FDS. Die Aufgabe zeigt dann, dass Δ nach Trennung der Variablen durch

$$\Delta(t) = \Delta_0 \exp\left(\int_0^t \text{spur}(A(s)) ds\right)$$

gegeben ist.]

Wir betrachten also nun die Zeilen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von φ . Die Bedingung $\dot{\Phi} = A\Phi$ bedeutet für die Einträge φ_{ij} von Φ offenbar

$$\dot{\varphi}_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_{kj}$$

($1 \leq i, j \leq n$). Da (φ_{ij}) bei festem $i \in \{1, \dots, n\}$ offenbar die Komponenten von φ_i sind, heißt dies, dass

$$\dot{\varphi}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \varphi_k$$

(für $i = 1, \dots, n$) ist, dass also $\dot{\varphi}_i(t)$ punktweise diese Linearkombination von $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ ist. Das hilft jetzt bei der Differentiation der Determinante. In der Leibniz-Formel

$$\det \Phi = \sum_{\sigma \in SS_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \varphi_{i\sigma(i)}$$

ergibt nun die Leibnizsche Produktregel, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}_{i\sigma(i)} \prod_{j \neq i} \varphi_{j\sigma(j)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \dot{\varphi}_{i\sigma(i)} \prod_{j \neq i} \varphi_{j\sigma(j)} \right) \end{aligned}$$

ist. Hier ist nun für jedes $i = 1, \dots, n$ der i . Summand offenbar die Determinante der Matrix, bei der man die Zeile φ_i durch $\dot{\varphi}_i$ ersetzt, also

$$\frac{d}{dt} \det \Phi = \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T = \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \varphi_{i-1}, \dot{\varphi}_i, \varphi_{i+1}, \dots, \varphi_n)^T.$$

Setzt man nun $\dot{\varphi}_i = \sum_k a_{ik} \varphi_k$ ein, so liefert nur der Summand mit $k = i$ einen Beitrag, da φ_k für $k \neq i$ schon in einer weiteren Zeile steht, also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \Phi &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, \sum_k a_{ik} \varphi_k, \dots, \varphi_n)^T \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1, \dots, a_{ii} \varphi_i, \dots, \varphi_n)^T \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \det(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \\ &= \operatorname{spur}(A) \det \Phi. \end{aligned}$$

Es löst also Δ die lineare Differentialgleichung $\dot{x} = \operatorname{spur}(A)x$ auf \mathbb{R} .

Aufgabe 38. Die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung wird für Konstanten $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$ gegeben durch

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

(wobei $\gamma > 0$ die Dämpfung beschreibt). Geben Sie eine Basis des Lösungsraumes im so genannten *Kriechfall* an, wo $\Delta := 4\omega^2 - \gamma^2 < 0$ ist. (Die Fälle $\Delta = 0$ und $\Delta > 0$ behandeln wir später.) (Hinweis: Schreiben Sie (4) als ein System $\dot{z} = Az$ mit $A \in \operatorname{Mat}_2 \mathbb{R}$ und versuchen Sie A zu diagonalisieren. Machen Sie dann einen geeigneten linearen Koordinatenwechsel $z = Sw$ mit $S \in \operatorname{GL}_2 \mathbb{R}$. Oder machen Sie gleich einen „Ansatz“ $x(t) = e^{\lambda t}$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$).)

Lösungsvorschlag. [Vorbemerkung: Übergang zum System auf \mathbb{R}^2 führt auf $\dot{z} = Az$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Will man diese Matrix diagonalisieren, führt dies auf die Eigenwerte λ von A , die durch die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \omega^2 & \lambda + \gamma \end{pmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + \gamma) + \omega^2 = \lambda^2 + \lambda\gamma + \omega^2\end{aligned}$$

gegeben sind. Hat dieses zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so führt dies zu einem Fundamentalsystem durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ eines transformierten Systems. Die Transformationsmatrix $S \in \text{GL}_2\mathbb{R}$, die die Eigenvektoren von A in den Spalten stehen hat, kann in der 1. Zeile mit $(1, 1)$ gewählt werden, woraus dann für die ersten Komponenten der Fundamentallösungen des System $\dot{z} = Az$ die Funktionen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ resultieren. Es ist dann $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ eine Basis des Lösungsraums für (4). (Im Falle, dass die Eigenwerte komplex (und nicht-reell) sind oder zusammenfallen, ist die Situation anders.)]

Zu der gleichen Lösung kommt man, wenn man den „Exponentialansatz“

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ macht. Einsetzen in (4) liefert dann wegen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t} : \\ 0 &= \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = e^{\lambda t}(\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2).\end{aligned}$$

Das führt auf die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0,$$

welche mit der Mitternachtsformel zu

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

mit der Diskriminante $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$ führt. Im sogenannten „Kriechfall“ wo $\Delta < 0$ ist, hat man also zwei reelle Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, welche also damit zur Basis $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ für den 2-dimensionalen Lösungsraum $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ führt (da ihre Wronski-Determinante nicht verschwindet, die gerade $(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$ ist).

Aufgabe 39. (a) Berechnen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$ auf \mathbb{R}^2 mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Bx$ auf \mathbb{R}^2 mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

Lösungsvorschlag. (a) Zunächst versuchen wir A zu diagonalisieren. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{R}[t]$ von A ,

$$\chi_A(t) = \det(tE_2 - A) = \det \begin{pmatrix} t & -3 \\ -1 & t+2 \end{pmatrix} = t(t+2) - 3 = t^2 + 2t - 3.$$

Dieses hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{1 - (-3)} = -1 \pm 2.$$

Also hat A zwei (einfache) reelle Eigenwerte bei $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = +1$. Nun berechnen wir eine Basis von Eigenvektoren von A . Für $\lambda_1 = -3$ erhalten wir

$$-3E_2 - A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

also wird der Eigenraum $\text{Eig}(A, -3) = \ker(-3E_2 - A)$ z.B. von $v_1 = (1, -1)^T$ erzeugt. Für $\lambda_2 = +1$ ist

$$E_2 - A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Also wird $\text{Eig}(A, 1)$ z.B. von $v_2 = (3, 1)^T$ erzeugt. Der Koordinatenwechsel $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y \mapsto x = Sy$, mit

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

transformiert dann das System auf

$$\dot{y} = Dy$$

mit $D = S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Dann ist $\left(\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \right)$ ein Fundamentalsystem (FDS) für $\dot{y} = Dy$ und damit löst $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 3e^{\lambda_2 t} \\ -e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

die Differentialgleichung $\dot{\Phi} = A\Phi$ (mit $\Phi(0) = E_2$) auf $\text{Mat}_2(\mathbb{R})$. Damit ist also

$$\left(\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3e^t \\ e^t \end{pmatrix} \right)$$

ein FDS für $\dot{x} = Ax$ auf \mathbb{R}^2 .

(b) Ähnlich gehen wir bei B vor:

$$\chi_B(t) = \det \begin{pmatrix} t & +2 \\ -1 & t-2 \end{pmatrix} = t(t-2) + 2 = t^2 - 2t + 2$$

mit den dieses Mal nicht-reellen Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm i.$$

Deshalb können wir nun nur in $\text{Mat}_2\mathbb{C}$ diagonalisieren und berechnen die komplexen Eigenräume:

$$(1+i)E_2 - B = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -1 & -1+i \end{pmatrix},$$

also $\text{Eig}(B, 1 + i) = \langle (2, -1 - i)^T \rangle$ und

$$(1 - i)E_2 - B = \begin{pmatrix} 1 - i & 2 \\ -1 & -1 - i \end{pmatrix},$$

was zu $\text{Eig}(B, 1 - i) = \langle (2, -1 + i)^T \rangle$ führt. Die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 - i & -1 + i \end{pmatrix}$$

transformiert also $\dot{z} = Bz$ auf $\dot{w} = Dw$ mit $D = \text{diag}(1 + i, 1 - i)$. Das führt also zur Lösung

$$\Phi = S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1 t} & 2e^{\lambda_2 t} \\ (-1 - i)e^{\lambda_1 t} & (-1 + i)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

von $\dot{\Phi} = A\Phi$ auf $\text{Mat}_2\mathbb{C}$. Damit ist

$$\left(\begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1 t} \\ (-1 - i)e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_2 t} \\ (-1 + i)e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \right)$$

ein FDS für $\dot{z} = Bz$ auf \mathbb{C}^2 . Wir wissen nun, dass die Real- und Imaginärteile dieser Lösung den reellen Lösungsraum $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ von $\dot{x} = Bx$ erzeugen und versuchen es mal mit den Realteilen, um eine Basis von $L_{(h)}$ zu finden:

$$\text{Re}(2e^{\lambda_1 t}) = 2\text{Re}(e^{(1+i)t}) = 2e^t \text{Re}(e^{it}) = 2e^t \cos t,$$

und

$$\text{Re}((-1 - i)e^{\lambda_1 t}) = \text{Re}((-1 - i)e^t e^{it}) = \text{Re}((-1 - i)e^t(\cos t + i \sin t)) = e^t(-\cos t + \sin t),$$

und notieren

$$\varphi_1 := (2e^t \cos t, e^t(-\cos t + \sin t))^T.$$

Und weiter:

$$\text{Re}(2e^{\lambda_2 t}) = 2\text{Re}(e^{(1-i)t}) = 2e^t \text{Re}(\cos(-t) + i \sin(-t)) = 2e^t \cos t,$$

was wohl wieder auf φ_1 führen dürfte. Deshalb nehmen wir jetzt mal den Imaginärteil:

$$\text{Im}(2e^{\lambda_2 t}) = 2e^t \sin(-t) = -2e^t \sin t$$

und

$$\begin{aligned} \text{Im}((-1 + i)e^{\lambda_2 t}) &= e^t \text{Im}((-1 + i)(\cos(-t) + i \sin(-t))) = e^t(-\sin(-t) + \cos(-t)) \\ &= e^t(\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

Wir setzen damit

$$\varphi_2 := (-2e^t \sin t, e^t(\cos t + \sin t))^T$$

und prüfen jetzt noch, ob (φ_1, φ_2) linear unabhängig (in einem Punkt) ist. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} 2e^t \cos t & -2e^t \sin t \\ e^t(-\cos t + \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} \\ &= 2e^{2t}(\cos^2 t + \cos t \sin t) + 2e^{2t}(-\cos t \sin t + \sin^2 t) \\ &= 2e^{2t} \neq 0. \end{aligned}$$

Es ist damit (φ_1, φ_2) ein FDS für $\dot{x} = Bx$ auf \mathbb{R}^2 und die allgemeine Lösung damit durch $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) gegeben.

Aufgabe 40. Berechnen Sie eine Basis für den Lösungsraum der Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung (vgl. Aufgabe-38)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2x = 0$$

(mit $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$) auf \mathbb{R} nun auch in den folgenden Fällen für die Diskriminante $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$:

(a) $\Delta > 0$ (Schwingungsfall)

(b) $\Delta = 0$ (aperiodischer Grenzfall)

Lösungsvorschlag. Der Lösungsansatz $x = e^{\lambda t}$ (mit $\lambda \in \mathbb{C}$) führt auf die charakteristische Gleichung (vgl. Aufgabe-38)

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega^2 = 0$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

und $\Delta := 4\omega^2 - \gamma^2$.

(a) Im Falle $\Delta > 0$ sind die Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ konjugiert komplex zueinander und nicht reell:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm i\frac{\sqrt{\Delta}}{2},$$

aber einfach. Deshalb bildet dann $(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t})$ eine komplexe Basis des Lösungsraumes $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ von

$$\ddot{z} + \gamma\dot{z} + \omega^2z = 0$$

auf \mathbb{C} . Wir berechnen den Realteil von $e^{\lambda_1 t}$:

$$\operatorname{Re}(e^{\lambda_1 t}) = \operatorname{Re}(e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cdot e^{i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t}) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right).$$

Und der Imaginärteil von $e^{\lambda_2 t}$ ist:

$$\operatorname{Im}(e^{\lambda_2 t}) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right).$$

Die Wronski-Determinante von

$$\dot{A} := \left(\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right), \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right)$$

ist nicht Null, wie man ähnlich wie in Aufgabe-39 sieht. Damit ist \dot{A} eine Basis von $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) In diesem Fall $\Delta = 0$ bekommt die charakteristische Gleichung eine doppelte Nullstelle bei $\lambda = -\gamma/2$. Die zugehörige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}$$

bekommt nur einen 1-dimensionalen Eigenraum $\text{Eig}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_2 - A)$, denn

$$\lambda E_2 - A = \begin{pmatrix} -\gamma/2 & -1 \\ \omega^2 & \gamma/2 \end{pmatrix}$$

ist nicht die Nullmatrix,

$$\text{Eig}(A, \lambda) = \langle (-1, \gamma/2)^T \rangle.$$

Es ist also in diesem Fall A nicht diagonalisierbar. Die Jordansche Normalform zu A ist deshalb

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und eine Basis für den Koordinatenwechsel bekommt man durch $((\lambda E_2 - A)v, v)$, wo v ein nicht-triviales Element des Hauptraumes

$$\text{Hau}(A, \lambda) = \ker(\lambda E_2 - A)^2$$

ist. In unserem Fall ist $(\lambda E_2 - A)^2 = 0$ also $\text{Hau}(A, \lambda) = \mathbb{R}^2$, und wir können aus diesem frei wählen. Unsere Wahl fällt auf $v := (0, 1)^T$, weil dann

$$w = (\lambda E_2 - A)v = (-1, \gamma/2)^T$$

ist, den wir schon eben als Basisvektor für $\text{Eig}(A, \lambda)$ identifiziert haben. Die invertierbare Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma/2 & 1 \end{pmatrix}$$

konjugiert dann A auf B : $S^{-1}AS = B$. (Man mache mal zur eigenen Überzeugung die Probe.) Nun löst man $\dot{z} = Bz$ zunächst von unten nach oben (oder direkt mit e^{tB}):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2, \end{aligned}$$

also etwa zu $z_2 = e^{\lambda t}$ und dann

$$\dot{z}_1 = \lambda z_1 + e^{\lambda t}$$

mit Variation der Konstanten: $z_1(t) = u(t) \cdot e^{\lambda t}$ und

$$u(t) = \int_0^t e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t} dt = t,$$

was somit zu dem FDS

$$\dot{A} = \left(\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{pmatrix} \right)$$

von $\dot{z} = Bz$ führt. Zurücktransformiert löst dann

$$\begin{aligned} \Phi &= S \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \gamma/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e^{\lambda t} & -te^{\lambda t} \\ \frac{\gamma}{2}e^{\lambda t} & \frac{\gamma}{2}e^{\lambda t} + e^{\lambda t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

das System $\dot{x} = Ax$ auf \mathbb{R}^2 . Die 1. Komponenten $(\exp(\lambda t), t \exp(\lambda t))$ bilden somit eine Basis für $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. [Anmerkung: Die Lösung $t \mapsto t \exp(\lambda t)$ finden die Physiker ebenso mit einem „Ansatz“.]

Aufgabe 41. Ein *Newton-System* auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = f(x) \tag{4}$$

mit $m > 0$ (der Masse eines Teilchens) und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (dem Kraftfeld, in dem sich das Teilchen bewegt).

(a) Ist $V: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $V' = -f$ (ein so genanntes *Potential* für f), so zeigen Sie, dass durch $H: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x),$$

ein 1. Integral für (4) gegeben ist (vgl. Aufgabe-34).

(b) Im Falle des harmonischen Oszillators (vgl. Aufgabe-32) ist $f(x) = -kx$ (mit $k > 0$). Wählen Sie ein Potential für f und beschreiben Sie dann die Niveaulinien für das zugehörige 1. Integral H . Wie sieht die Dynamik des Systems auf den Niveaulinien $\{H = c\}$ (für $c \in \mathbb{R}$) aus? Beschreiben Sie qualitativ.

Lösungsvorschlag. (a) Sei also $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$ eine Lösung

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \frac{1}{m}f(x)$$

auf $I \times \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass H entlang so einer Kurve konstant ist. Dazu differenzieren wir $t \mapsto H(x(t), \dot{x}(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), \dot{x}(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + V(x(t)) \right) \\ &= \frac{1}{2}m \cdot 2\dot{x}(t)\ddot{x}(t) + V'(x(t))\dot{x}(t) \\ &= \dot{x}(t)(m\ddot{x}(t) + V'(x(t))) = (\dot{x}(m\ddot{x} - f(x)))(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Für $f(x) = -kx$ ($k > 0$) wählen wir $V: I \rightarrow \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, und erhalten das 1. Integral $H: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Die Niveaulinien $\{H = c\}$ sind dann offenbar Ellipsen für $c > 0$ mit den Hauptachsen $a = \sqrt{2c/k}$ und $b = \sqrt{2c/m}$:

$$H(x, y) = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Für $c = 0$ bekommt man die einzige Gleichgewichtslage des Systems in $(x, y) = (0, 0)$,

$$H(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0.$$

[Das ist ein kritischer Wert von H , $\partial H/\partial x = 0$, $\partial H/\partial y = 0$, so dass der implizite Funktionensatz nicht anwendbar ist (und man i.a. keine „Linie“ bekommt.) Für $c < 0$ ist $\{H = c\} = \emptyset$.

Da auf den Niveaulinien $\{H = c\}$ für $c > 0$ keine Gleichgewichtslagen liegen und sie zusammenhängend sind, bestehen diese aus einer einzigen Bahn, die also damit periodisch ist.

Aufgabe 42. Sei $\exp: \text{Mat}_n\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_n\mathbb{C}$, $A \mapsto e^A$, die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion.

(a) Berechnen Sie e^{A_i} ($i = 1, 2$) für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $A \in \text{Mat}_n\mathbb{C}$:

$$\det e^A = e^{\text{spur}A},$$

(Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die Spalten von $\Phi(t) = e^{tA}$ Lösungsfundamentalsystem von $\dot{z} = Az$ sind und Aufgabe-37.)

Lösungsvorschlag. (a) Um $\exp(A_i)$ ($i = 1, 2$) zu berechnen, diagonalisieren wir zunächst A_i . Aus Aufgabe-39 wissen wir, dass

$$S^{-1}A_1S = \text{diag}(-3, 1) =: D \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ist

$$\exp(A_1) = \exp(SDS^{-1}) = S \exp(D) S^{-1} = S \cdot \text{diag}(e^{-3}, e) \cdot S^{-1}.$$

Das Inverse von S berechnen wir bei $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit der Formel der Adjunkten von S , d.i.

$$S^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

also zu

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das liefert

$$\begin{aligned} \exp(A_1) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-3} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3} & 3e \\ -e^{-3} & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{-3} + 3e & -3e^{-3} + 3e \\ -e^{-3} + e & 3e^{-3} + e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

So gehen wir auch bei A_2 vor, wobei wir hier einen Umweg über die komplexen Zahlen machen, da A_2 über \mathbb{R} nicht diagonalisierbar ist. Es ist

$$S^{-1}A_2S = \text{diag}(1+i, 1-i) =: D \text{ mit } S = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix}$$

(siehe Aufgabe-39). Das Inverse von S ist wegen

$$\det S = 2(-1+i) - 2(-1-i) = -2 + 2i + 2 + 2i = 4i :$$

$$S^{-1} = \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \exp(A_2) &= \exp(SDS^{-1}) = S \exp(D) S^{-1} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1-i & -1+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{1+i} & 0 \\ 0 & e^{1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2e^{1+i} & 2e^{1-i} \\ (-1-i)e^{1+i} & (-1+i)e^{1-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1+i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} 2(-1+i)e^{1+i} + 2(1+i)e^{1-i} & -4e^{1+i} + 4e^{1-i} \\ (-1-i)(-1+i)e^{1+i} + (-1+i)(1+i)e^{1-i} & 2(1+i)e^{1+i} + 2(-1+i)e^{1-i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier könnten wir nun schon aufhören. Da die Matrix noch nicht sonderlich reell aussieht, was sie aber sein muss, da $\exp(A) \in \text{GL}_n\mathbb{R}$ liegt, falls $A \in \text{Mat}_n\mathbb{R}$ ist, zerlegen wir nun noch die Einträge $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dieser Matrix in Real- und- Imaginärteil. Da der Vorfaktor $1/(4i)$ noch ins Spiel kommt, brauchen wir nur die Imaginärteile der vier Einträge. Die Realteile müssen Null sein, was eine Kontrollmöglichkeit dafür bietet, ob man sich verrechnet hat. Wir rechnen also:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \text{Im}(2(-1+i)e(\cos(1) + i \sin(1)) + 2(1+i)e(\cos(-1) + i \sin(-1))) \\ &= 2e(\cos(1) - \sin(1)) + 2e(\cos(1) - \sin(1)). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Einträge von $\exp(A_2)$ mit $b_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i, j \leq 2$), so erhalten wir also nach Division durch $4i$ den Eintrag

$$b_{11} = e(\cos(1) - \sin(1)).$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \text{Im}(-4e^{1+i} + 4e^{1-i}) &= \text{Im}(-4e(\cos(1) + i \sin(1)) + 4e(\cos(-1) + i \sin(-1))) \\ &= 4e(-\sin(1) - \sin(1)) = -8e \sin(1). \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$b_{12} = -2e \sin(1).$$

Und so geht es weiter:

$$\begin{aligned} \text{Im}((-1-i)(-1+i)e^{1+i} + (-1+i)(1+i)e^{1-i}) \\ &= \text{Im}(2e(\cos(1) + i \sin(1)) - 2e(\cos(-1) + i \sin(-1))) \\ &= 2e(\sin(1) + \sin(1)) = 4e \sin(1), \end{aligned}$$

also

$$b_{21} = e \sin(1).$$

Und schließlich

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} (2(1+i)e^{1+i} + 2(-1+i)e^{1-i}) \\ &= \operatorname{Im} ((1+i)2e(\cos(1) + i \sin(1)) + (-1+i)2e(\cos(-1) + i \sin(-1))) \\ &= 2e(\cos(1) + \sin(1)) + 2e(\cos(1) + \sin(1)) \\ &= 4e(\cos(1) + \sin(1)), \end{aligned}$$

also

$$b_{22} = e(\cos(1) + \sin(1)).$$

Insgesamt (puh!) erhalten wir also:

$$e^{A_2} = e \begin{pmatrix} \cos(1) - \sin(1) & -2 \sin(1) \\ \sin(1) & \cos(1) + \sin(1) \end{pmatrix}$$

(ohne Gewähr).

(b) Da $\mathbb{R} \rightarrow \operatorname{GL}_n \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{tA}$ Lösung von $\dot{\Phi} = A\Phi$ (mit $\Phi(0) = E_n$) ist, erfüllt nach Aufgabe-37 die Funktion $\Delta = \det \Phi$ die Gleichung

$$\dot{z} = \operatorname{spur}(A)z$$

auf \mathbb{C} (mit $z(0) = 1$). Es ist also

$$z(t) = \exp(\operatorname{spur}(A)t).$$

Für $t = 1$ erhält man

$$\det(e^A) = z(1) = e^{\operatorname{spur}(A) \cdot 1} = e^{\operatorname{spur}(A)}.$$

(Insbesondere ergibt sich erneut: $e^A \in \operatorname{GL}_n \mathbb{C}$.)

Aufgabe 43. Sei $\exp: \operatorname{Mat}_n \mathbb{C} \rightarrow \operatorname{GL}_n \mathbb{C}$ die (komplexe Matrizen-) Exponentialfunktion.

(a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_2 \mathbb{C}$ an, so dass

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

und begründen Sie dies.

(b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so ist $e^\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\exp(A)$.

(c) Begründen Sie, warum $\exp: \operatorname{Mat}_n \mathbb{C} \rightarrow \operatorname{GL}_n \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist und es gilt:

$$D \exp_0 = \operatorname{id}_{\operatorname{Mat}_n \mathbb{C}}.$$

Lösungsvorschlag. (a) Die beiden Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind nilpotent mit $A^2 = B^2 = 0$. Deshalb sind

$$\exp(A) = \mathbf{1} + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(B) = \mathbf{1} + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist

$$C := A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Spiegelung an der Winkelhalbierenden, da $e_1 \mapsto e_2$ und $e_2 \mapsto e_1$ gilt. Deshalb ist $(1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und $(-1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -1$. Die Transformationsmatrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2\mathbb{C}$$

transformiert daher C auf $D := \text{diag}(1, -1)$: $S^{-1}CS = D$. Mit

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist deshalb

$$\begin{aligned} \exp(C) &= S \exp(D) S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} \neq \exp(A)\exp(B). \end{aligned}$$

(b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A , so gibt es also ein $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit $Az = \lambda z$. Es folgt induktiv

$$A^k z = \lambda^k z,$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und daher

$$\exp(A)z = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \cdot z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A^k z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda^k z) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \right) \cdot z = e^\lambda z.$$

z ist also auch Eigenvektor von $\exp(A)$, allerdings jetzt zum Eigenwert e^λ . Es ist also e^λ Eigenwert von $\exp(A)$.

(c) Die Partialsummen von $\exp(A)$ konvergieren auf jedem Kompaktum $K \subseteq \text{Mat}_n\mathbb{C}$ gleichmäßig (und absolut) gegen $\exp(A)$. Denn da $\|\cdot\|: \text{Mat}_n\mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$ stetig ist, gibt es eine obere Schranke $C > 0$ für $\|A\|$ auf K . Damit gilt für die Exponentialreihe $\exp(A)$ auf K , dass ihre zugehörige Reihe der Normen durch e^C beschränkt ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq e^{\|A\|} \leq e^C,$$

und nach dem Weierstraßschen M -Test konvergiert die Reihe daher auf K gleichmäßig und absolut. Da die Partialsummen Einträge haben, die Polynome in den Einträgen von A sind, sind diese stetig differenzierbar und daher ist der Limes nach einem weiteren Satz von Weierstraß ebenfalls stetig differenzierbar. Das gilt für jedes Kompaktum, also ist \exp auf ganz $\text{Mat}_n\mathbb{C}$ stetig

differenzierbar (sogar komplex analytisch in mehreren Veränderlichen). Für das Differential im Nullpunkt

$$D \exp_0: \text{Mat}_n \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_n \mathbb{C}$$

berechnen wir die Richtungsableitung so:

$$D \exp_0(B) = \left. \frac{d}{dt} \exp(tB) \right|_{t=0} = B \exp(tB)|_{t=0} = B \cdot \mathbf{1} = B,$$

also gilt:

$$D \exp_0 = \text{id}.$$

[Anmerkung: Nach dem Umkehrsatz ist damit $\exp: \text{Mat}_n \mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_n \mathbb{C}$ lokal um $A = 0 \in \text{Mat}_n \mathbb{C}$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Umgebung von $\mathbf{1} \in \text{GL}_n \mathbb{C}$.]

Aufgabe 44. Die Bewegung eines Pendels (mit starrer Stange) unter dem Einfluss der Erdanziehung geschieht (nach Normierung einer Konstanten) durch Lösung der folgenden Differentialgleichung des „mathematischen Pendels“ auf \mathbb{R} :

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

(x beschreibt hier das Bogenmaß des Winkels der Auslenkung.)

- (a) Geben Sie ein 1. Integral H auf dem Phasenraum \mathbb{R}^2 der Gleichung an (vgl. Aufgabe-41).
 (b) Diskutieren Sie nun die Niveaulinien $\{H = c\}$ ($c \in \mathbb{R}$) und die Bahnen, die auf ihnen liegen, qualitativ. Machen Sie eine Skizze des Phasendiagramms.

Lösungsvorschlag. (a) Ein Potential $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\sin x$, ist offenbar durch

$$V(x) = -\cos x$$

gegeben, $V'(x) = \sin x = -f(x)$ (vgl. Aufgabe-41). Deshalb ist $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

ein 1. Integral für $\ddot{x} + \sin x = 0$.

(b) H ist offenbar nach unten beschränkt,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \geq 0 - 1 = -1,$$

und hat seine Minima in $x = 2k\pi$, $y = 0$ ($k \in \mathbb{Z}$), welches der unteren Gleichgewichtslage des Pendels entspricht. (Eigentlich ist der Phasenraum $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, wenn man $x \in \mathbb{S}^1$ nimmt, weshalb wir eine Periodizität von 2π in x -Richtung des Phasendiagramms erwarten.) Für $c = -1$ besteht also $\{H = -1\}$ aus genau diesen Punkten,

$$\{H = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi, y = 0\}.$$

Für $-1 < c < 1$ lösen wir $H(x, y) = c$ nach y auf,

$$y = \pm 2\sqrt{\cos x + c}.$$

Das beschreibt konzentrische Ovale um die behandelten Gleichgewichtslagen herum. Auf diesen liegen keine kritischen Punkte von H , also keine Gleichgewichtslagen von

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x.$$

Deshalb besteht jedes dieser Ovale (eigentlich gibt es für jedes $c \in (-1, 1)$ nur eines, wenn man die oben erwähnte Periodizität beachtet) aus einer einzigen Bahn, welche damit periodisch ist. Das beschreibt die Pendelbewegung so kleiner „Energie“ H , dass es keinen Überschlag gibt.

Der Fall $c = 1$ ist speziell. Zum einen liegen hier die kritischen Punkte $x = (2k + 1)\pi$, $y = 0$ von H , welche die obere Gleichgewichtslage des Pendels beschreiben. Zum anderen liegen dort die Bahnen auf den Niveaulinien

$$y = \pm 2\sqrt{\cos x + 1} \quad (y \neq 0),$$

die von den kritischen Punkten $(2k - 1)\pi$ zu $(2k + 1)\pi$ (bei $y > 0$) bzw. von $(2k + 1)\pi$ nach $(2k - 1)\pi$ (bei $y < 0$) führen ($k \in \mathbb{Z}$). Bis auf die Periodizität sind das die beiden Bahnen, die die Bewegung des Pendels beschreiben, die man erhält, wenn man die Anfangsgeschwindigkeit gerade so wählt, dass das Pendel (gerade so eben und in unendlicher Zeit) in die obere Gleichgewichtslage läuft (aber diese natürlich nie erreicht).

Für $c > 1$ dann schließlich ist man wieder in dem Bereich, wo es keine kritischen Punkte mehr gibt.

$$\{H = c\} \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{\cos x + c}$$

besteht aus den beiden Komponenten

$$y = +2\sqrt{\cos x + c}, \quad y = -2\sqrt{\cos x + c},$$

die nicht mehr zusammenkommen. Man hat dort für festes $c \in (1, \infty)$ genau zwei Bahnen, die die Bewegung des Pendels beschreiben, bei der die Energie H groß genug ist, dass das Pendel sich „überschlägt“. Diese beiden Bahnen wären im Phasendiagramm von $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ auch geschlossen und beschreiben damit auch eine periodische Bewegung. [Anm.: Beachte, dass wir hier keine Dämpfung berücksichtigt haben.]

Phasendiagramm:

Aufgabe 45. Seien $\omega, \omega_0, \gamma \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Differentialgleichung der „erzwungenen Schwingung“ auf \mathbb{R} (vgl. Aufgabe-36)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t).$$

(a) Sei $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass sich $x(t)$ für große t immer mehr der erzwungenen Schwingung

$$y(t) = A \cos(\omega t - \alpha)$$

(mit geeigneter *Amplitude* A und *Phasenverschiebung* α) annähert. (Hinweis: Lösen Sie die komplexe Gleichung mit rechter Seite $\exp(i\omega t)$ und gehen Sie dann zum Realteil über.)

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung im ungedämpften Fall ($\gamma = 0$) nun auch im Falle der Resonanz ($\omega = \omega_0$). (Hinweis: Ansatz: $x(t) = A \cdot t \exp(i\omega t)$.)

Lösungsvorschlag. (a) Wir versuchen eine spezielle Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = e^{i\omega t}$$

auf \mathbb{C} durch den Ansatz

$$z(t) = ce^{i\omega t}$$

zu gewinnen. Es ist dann

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= ci\omega e^{i\omega t} \\ \ddot{z}(t) &= -c\omega^2 e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

also

$$e^{i\omega t} = \ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = (-c\omega^2 + ci\gamma\omega + c\omega_0^2)e^{i\omega t},$$

was durch die Bedingung

$$c(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega) = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}$$

zu erreichen ist. Setzen wir nun

$$\alpha := \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

so ist

$$\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega = |\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega| \cdot e^{i\alpha},$$

also mit

$$A := ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{-1/2} :$$

$$y(t) := \operatorname{Re}(z(t)) = A \cdot \operatorname{Re}(e^{i\omega t} e^{i(-\alpha)}) = A \operatorname{Re}(e^{i(\omega t - \alpha)}) = A \cos(\omega t - \alpha).$$

spezielle Lösung von

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \operatorname{Re}(\ddot{z} + \gamma \dot{z} + \omega_0^2 z) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

kennen wir bereits aus den Aufgaben 38 und 40. Sie ist bei $\Delta := 4\omega_0^2 - \gamma^2$:

$$x(t) = c_1 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos(\sqrt{\Delta}t) + c_2 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \sin(\sqrt{\Delta}t)$$

im Schwingungsfall $\Delta > 0$,

$$x(t) = c_1 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) + c_2 \cdot t \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)$$

im aperiodischen Grenzfall ($\Delta = 0$), und

$$x(t) = c_1 \cdot \exp\left(\left(-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)t\right) + c_2 \cdot \exp\left(\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)t\right)$$

im Kriechfall $\Delta < 0$. Wegen $-\Delta = \gamma^2 - 4\omega^2$ ist $\sqrt{-\Delta} < \gamma$ und daher in allen Fällen der Faktor vor dem t im Exponentialterm kleiner als Null. Deshalb gilt in allen Fällen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

(Die Dämpfung zwingt die Feder schließlich in den Ruhezustand.) Für die inhomogene Gleichung folgt daher in der Tat, dass für die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \alpha) + c_1 \cdot (\dots) + c_2 \cdot (\dots)$$

stets

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - y(t)) = 0.$$

[Anm.: Unabhängig von den Anfangsbedingungen schwingt sich das System nach einer „Einschwingphase“ schließlich in die „erzwungene Schwingung“ $y(t)$ ein (d.h. sie nähert sich dieser immer mehr, sogar exponentiell schnell, an.)]

(b) Die allgemeine Lösung der ungedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

kennen wir schon. Sie ist

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Für die allgemeine Lösung der ungedämpften erzwungenen Schwingung im Resonanzfall

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\omega t)$$

brauchen wir deshalb nur noch eine spezielle Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir machen den Ansatz

$$z(t) = A \cdot t e^{i\omega t}$$

für eine spezielle Lösung der komplexen Gleichung

$$\ddot{z} + \omega^2 z = e^{i\omega t}$$

und rechnen:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A(e^{i\omega t} + i\omega t e^{i\omega t}) = A(1 + i\omega t)e^{i\omega t} \\ \ddot{z}(t) &= A(i\omega + (1 + i\omega t)i\omega)e^{i\omega t} = A(2i\omega - \omega^2 t)e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\ddot{z} + \omega^2 z = (A(2i\omega - \omega^2 t) + \omega^2 \cdot At) e^{i\omega t} = (2iA\omega)e^{i\omega t},$$

und das bekommen wir also zu $e^{i\omega t}$, wenn wir

$$A(\omega) = \frac{1}{2i\omega} = \frac{1}{2\omega} e^{-i\pi/2}$$

setzen. Übergang zum Realteil $y := \operatorname{Re}(z)$ führt dann auf die spezielle Lösung

$$y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = \frac{1}{2\omega} t \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t),$$

denn

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \operatorname{Re}(\ddot{z} + \omega^2 z) = \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \cos(\omega t).$$

Die allgemeine Lösung im Resonanzfall ist daher

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

[Anm.: x wird also für $t \rightarrow \infty$ beliebig groß (in positiver wie in negativer Richtung), was man als „Resonanzkatastrophe“ bezeichnet.]

Aufgabe 46. Sei $\exp: \operatorname{Mat}_n \mathbb{R} \rightarrow \operatorname{GL}_n \mathbb{R}$, $A \mapsto e^A$, die reelle (Matrizen-) Exponentialfunktion und sei

$$\operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R} = \{S \in \operatorname{GL}_n \mathbb{R} : \det S > 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\exp(A) \in \operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}$ ist, für alle $A \in \operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie, dass $S = \operatorname{diag}(-1, -4) \in \operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}$ nicht im Bild von \exp liegt.

Lösungsvorschlag. (a) Die (stetige) Kurve $\alpha: [0, 1] \rightarrow \operatorname{GL}_n \mathbb{R}$,

$$\alpha(t) = \exp(tA),$$

verbindet die Punkte $\alpha(0) = \mathbf{1}$ und $\alpha(1) = A$ in $\operatorname{GL}_n \mathbb{R}$. Da $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = \det(\alpha(t)),$$

stetig ist und nie Null und außerdem $f(0) = 1 > 0$, muss nach dem Zwischenwertsatz auch $f(1) > 0$ sein. Es folgt

$$\det(\exp(A)) > 0,$$

also $\exp(A) \in \operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}$. Alternativ sieht man unmittelbar mit Aufgabe-42-b, dass

$$\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{spur}(A)} > 0$$

ist.

[Anmerkung: $\operatorname{GL}_n \mathbb{R} \subseteq \operatorname{Mat}_n \mathbb{R}$ ist eine offene Teilmenge, die aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht, nämlich $\operatorname{GL}_n^+ \mathbb{R}$ (die eine Untergruppe ist) und $\{S \in \operatorname{GL}_n \mathbb{R} : \det S < 0\}$. Diese sind diffeomorph, weil die Multiplikation mit einer festen Matrix negativer Determinante wegen des Determinanten-Multiplikationssatzes sie ineinander überführt.]

(b) Sei also $S = \operatorname{diag}(-1, -4)$. Wir nehmen an, dass es ein $A \in \operatorname{Mat}_2 \mathbb{R}$ mit $\exp(A) = S$ gibt. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A . Dann ist nach Aufgabe-43-b e^λ Eigenwert von S . Die beiden

Eigenwerte von S sind aber beide negativ. Deshalb kann λ nicht reell sein. Da aber A reell ist, ist auch $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A , denn ist $z \in \mathbb{C}^2$ ein Eigenvektor für λ , so ist $\bar{z} \in \mathbb{C}^2$ Eigenvektor zu $\bar{\lambda}$:

$$A\bar{z} = \bar{A}z = \overline{Az} = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z}.$$

Da schließlich

$$|\exp(\bar{\lambda})| = e^{\operatorname{Re}(\bar{\lambda})} = e^{\operatorname{Re}(\lambda)} = |\exp(\lambda)|$$

ist, muss $e^{\bar{\lambda}} = e^\lambda$ sein, denn sie sind -1 oder -4 . Es gibt also zwei linear unabhängige Vektoren z_1 und z_2 in \mathbb{C}^2 mit

$$Az_1 = \lambda z_1, \quad Az_2 = \bar{\lambda} z_2.$$

Aber z_1 und z_2 sind dann auch linear unabhängige Eigenvektoren von $S = \exp(A)$. zum Eigenwert $e^\lambda = e^{\bar{\lambda}}$. Der Eigenraum von -1 bzw. -4 von S ist nur 1-dimensional. Das kann also nicht sein. S liegt also nicht im Bild von $\exp: \operatorname{Mat}_2\mathbb{R} \rightarrow \operatorname{GL}_2^+\mathbb{R}$.

[Anmerkung: Beachte, dass im Bild von $\exp: \operatorname{Mat}_n\mathbb{R} \rightarrow \operatorname{GL}_n^+\mathbb{R}$ durchaus Matrizen mit negativen Eigenwerten liegen. Z.B. liegt $S := -\mathbf{1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ im Bild, denn beispielsweise ist $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$ ein Urbild, weil A die Eigenwerte $\pm i\pi$ hat und $D = \operatorname{diag}(i\pi, -i\pi)$ unter \exp auf S geht. Dann aber auch jedes Konjugierte von D , z.B. A , denn S vertauscht mit allen Matrizen aus $\operatorname{GL}_n\mathbb{C}$.]

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass $\exp: \operatorname{Mat}_2\mathbb{C} \rightarrow \operatorname{GL}_2\mathbb{C}$ surjektiv ist.

Lösungsvorschlag. Sei $S \in \operatorname{GL}_2\mathbb{C}$. Um zu zeigen, dass S im Bild von $\exp: \operatorname{Mat}_2\mathbb{C} \rightarrow \operatorname{GL}_2\mathbb{C}$ liegt, reicht es wegen

$$\exp(TAT^{-1}) = T \exp(A) T^{-1}$$

(für alle $A \in \operatorname{Mat}_2\mathbb{C}$ und $T \in \operatorname{GL}_2\mathbb{C}$) zu zeigen, dass ein Konjugiertes von S im Bild von \exp liegt.

1. Fall: S ist diagonalisierbar. Dann können wir also direkt annehmen, dass S selbst diagonal ist, $S = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$, da $\det S \neq 0$ ist. Da aber $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ surjektiv ist, ist dann $S = \exp(A)$ mit $A = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2)$, wenn wir $\mu_1 \in \exp^{-1}(\lambda_1)$ und $\mu_2 \in \exp^{-1}(\lambda_2)$ wählen.

2. Fall: S ist nicht diagonalisierbar. Dann kann man S auf seine Jordansche Normalform konjugieren und wir können gleich annehmen, dass S selbst Jordanform hat, also

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Wir wählen wieder ein Urbild $\mu \in \mathbb{C}$ von λ unter \exp , $e^\mu = \lambda$, und setzen

$$A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Dann ist $A = \mu \mathbf{1}_2 + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $[\mu \mathbf{1}_2, N] = 0$. Daher ist

$$\exp(A) = \exp(\mu \mathbf{1}_2) \exp(N).$$

Wegen $N^2 = 0$ ist $\exp(N) = \mathbf{1} + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit kann man $\exp(A)$ aber auch auf $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ konjugieren, denn λ ist offenbar einziger Eigenwert von $\exp(A)$ und $\exp(A) \neq \lambda \mathbf{1}_2$. (Jedes Konjugierte von $\lambda \mathbf{1}_2$ ist selbst wieder $\lambda \mathbf{1}_2$.) Es folgt: Auch S ist im Bild von $\exp: \text{Mat}_2\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_2\mathbb{C}$.

Aufgabe 48. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, $y: I \rightarrow G$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ auf G sowie $A: I \rightarrow \text{Mat}_n\mathbb{R}$, $A(t) = Df(y(t))$. Zeigen Sie: Zu jeder Lösung $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der in y linearisierten Gleichung $\dot{\xi} = A(t)\xi$ auf \mathbb{R}^n gibt es eine Variation von Lösungen (x_ε) von y , so dass ξ das Variationsvektorfeld von (x_ε) ist.

Lösungsvorschlag. Sei o.E. $0 \in I$. Wir setzen $y_0 := y(0) \in G$. Wir nehmen für die Aufgabe an, dass $I = (a, b)$ mit

$$a > t_-(y_0), \quad b < t_+(y_0)$$

ist. Dann wissen wir, dass für alle y aus einer offenen Umgebung von y_0 das Zeitintervall $I(y)$ auch $I = (a, b)$ enthält. Jetzt betrachten wir die geradlinige Kurve

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G, \quad s \mapsto y_0 + s\xi_0 =: y_s$$

mit $\xi_0 := \xi(0) \in \mathbb{R}^n$. (Das Vektorfeld $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist ja vorgegeben.) Für $\varepsilon > 0$ klein genug liegt diese Kurve in G und wir dürfen auch annehmen, dass

$$t_-(y_s) < a, \quad t_+(y_s) > b$$

ist, für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Dann setzen wir $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow G$,

$$x(s, t) = \varphi^t(y_s),$$

wo $\varphi: \Omega \rightarrow G$ das dynamische System zu $\dot{x} = f(x)$ sei. Mit f ist auch φ eine \mathcal{C}^2 -Abbildung und damit x auch zweimal stetig differenzierbar. Für jedes feste $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist dann offenbar $x_s: I \rightarrow G$, $x_s(t) = x(s, t)$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ und wegen $x_0(0) = \varphi^0(y_0) = y_0$ muss $x_0 = y$ sein. $(x_s)_s$ ist also eine Variation von Lösungen um y . Für das Variationsvektorfeld $\eta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (x_s) ,

$$\eta(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} x(s, t),$$

ist nun einerseits η Lösung der linearisierten Gleichung

$$\dot{\xi} = A(t)\xi$$

auf \mathbb{R}^n , mit $A: I \rightarrow \text{Mat}_n\mathbb{R}$, $A(t) = Df(y(t))$, und andererseits ist

$$\eta(0) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \varphi^0(y_s) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (y_0 + s\xi_0) = \xi_0.$$

Deshalb muss $\eta(t) = \xi(t)$, für alle $t \in I$ sein, also $\eta = \xi$.

[Anm.: Wenn $b = t_+(y_0)$ ist, kann man i.a. die Variation nur noch auf einer offenen Umgebung von $\{0\} \times I \subseteq \mathbb{R}^2$ definieren, die aber für $t \rightarrow b$ immer enger wird und kein gleichmäßiger Schlauch um $\{0\} \times I$ mehr ist.]

Aufgabe 49. Sei $r \in [1, \infty]$, f ein C^r -Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Zeigen Sie, dass x eine C^{r+1} -Abbildung ist.

Lösungsvorschlag. Wir können $r \in \mathbb{N}$ annehmen und machen Induktion über r .

$r = 1$. Falls $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ist und $x: I \rightarrow G$ Lösung von $\dot{x} = f(x)$, so ist also

$$\dot{x} = f \circ x \quad (5)$$

und damit x zunächst mal stetig differenzierbar, denn \dot{x} ist auch stetig, weil f und x es sind. Dann ist aber $f \circ x$ auch stetig differenzierbar, weil beide Faktoren es sind, also ist \dot{x} stetig differenzierbar. Das zeigt, dass x eine C^2 -Abbildung ist.

$r \rightarrow r+1$. Genau so können wir hier jetzt auch argumentieren. Ist nämlich nun nach Voraussetzung $f \in C^{r+1}(G, \mathbb{R}^n)$ und ist $x: I \rightarrow G$ eine Lösung, so wissen wir nach Induktionsvoraussetzung schon, dass $x \in C^{r+1}(I, G)$ ist, denn f ist ja dann auch C^r -Abbildung. Gleichung (5) zeigt dann aber, dass auch $f \circ x \in C^{r+1}(I, G)$ ist und damit $\dot{x} \in C^{r+1}(I, G)$, d.i.: $x \in C^{r+2}(I, G)$.

Aufgabe 50. (a) Wir betrachten noch einmal (vgl. Aufgabe-40) die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung ($\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$)

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf \mathbb{R} . Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ein Attraktor des Systems ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0, y_0) = (0, 0)$ des „mathematischen Pendels“ (vgl. Aufgabe-44)

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

stabil, aber kein Attraktor ist.

Lösungsvorschlag. (a) (i) Im Fall $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2 < 0$ (Kriechfall) ist die allgemeine Lösung (siehe Aufgabe-38)

$$x(t) = c_1 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t + c_2 \exp\left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)t,$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei die Anfangsbedingung $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ in den Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden kann und sich z_0 und $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ gegenseitig durch die gegebenen Konstanten abschätzen lassen. Für die +-Stabilität reicht es also zu zeigen, dass sich $\|z(t)\|$ für alle $t \in [0, \infty)$ gegen $\|c\|$ nach oben abschätzen lässt (durch eine Konstante, die nur von den gegebenen Konstanten abhängt und nicht etwa von t). Berechnung von $\dot{x}(t)$ und von $x^2(t) + \dot{x}^2(t)$ zeigt aber nun, dass die Funktion $N: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$N(t) = \|(x(t), \dot{x}(t))\|^2$$

sogar monoton fallend ist und gegen 0 konvergiert, denn der Vorfaktor von t in den Exponentialtermen ist überall kleiner als Null. Es ist also $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $+$ -stabil und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \dot{x}(t)) = (0, 0).$$

Das heißt, dass (x_0, y_0) ein (sogar *globaler*) Attraktor ist.

(ii) Im Schwingungsfall $\Delta > 0$ ist nach Aufgabe-40 die allgemeine Lösung (für alle $t \in \mathbb{R}$)

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\sqrt{\Delta}t) + c_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \sin(\sqrt{\Delta}t).$$

Es folgt für $N: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $t \mapsto \|(x(t), \dot{x}(t))\|^2$, zwar i.a. nicht, dass N monoton fallend gegen 0 konvergiert (für $t \rightarrow \infty$), allerdings gilt eine Abschätzung

$$N(t) \leq \alpha \|c\|^2 e^{-\gamma t},$$

mit einem $\alpha > 0$, welches nur von den vorgegebenen Konstanten abhängt. Das zeigt, dass auch hier $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $+$ -stabil ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), \dot{x}(t)) = (0, 0)$$

für alle Anfangslagen ist. Auch hier ist also (x_0, y_0) ein (globaler) Attraktor.

(iii) Im aperiodischen Grenzfall $\Delta = 0$ ist die allgemeine Lösung (siehe Aufgabe-40)

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

(für alle $t \in \mathbb{R}$). Auch hier mag die Norm N auf einem allerdings kompakten Intervall $[0, b]$ vielleicht steigen und ist dann aber durch eine Konstante mal dem Normquadrat der Anfangsbedingung nach oben beschränkt, wo die Konstante nur von den vorgegebenen Daten abhängt. Danach fällt sie dann monoton fallend gegen Null, ähnlich wie im Fall (i). Das zeigt, dass auch hier (x_0, y_0) ein (globaler) Attraktor ist.

(b) Die Bahnen $t \mapsto (x(t), \dot{x}(t))$, die in einer offenen Umgebung $B_\delta(o)$ von $(x_0, y_0) = 0 \in \mathbb{R}^2$ starten ($\delta > 0$), sind alles *Ovale*, nämlich die Niveaulinien des 1. Integrals $\{H = c\}$ für $c \in (-1, 0)$ (vgl. Aufgabe-44). Die sind kompakt und deshalb ist $N|_{\{H = c\}}$ wieder nach oben beschränkt mit

$$N(t) \leq \alpha \|c\|^2, \quad \forall t > 0,$$

mit einer Konstanten $\alpha > 0$, die unabhängig von allem ist. Das zeigt, dass (x_0, y_0) zwar $+$ -stabil (ja sogar stabil) ist, aber kein Attraktor, da die Bahn ja auf diesen geschlossenen Kurven bleibt und periodisch ist und damit nicht nach (x_0, y_0) hineinläuft.

Aufgabe 51. Sei $\varphi: \Omega \rightarrow G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir setzen für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$G_t := \{x \in G : t \in I(x)\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass $G_t \subseteq G$ offen ist, für alle $t \in \mathbb{R}$, und, dass für die Abbildung

$$\varphi^t: G_t \rightarrow G, \quad x \mapsto \varphi^t(x),$$

gilt: $\text{im}(\varphi^t) = G_{-t}$ und $\varphi^t: G_t \rightarrow G_{-t}$ ist ein Diffeomorphismus.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi^0 = \text{id}_G$ ist und für alle $s, t \in \mathbb{R}$ (dort, wo beide Seiten der Gleichung definiert sind) gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}.$$

(Man nennt die Familie von Diffeomorphismen $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ den zu φ gehörenden Fluss auf G .)

Lösungsvorschlag. (a) Sei $t \in \mathbb{R}$ und $x \in G_t$, also $t \in I(x)$. Aus dem Satz über die stetige Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert wissen wir, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von x gibt, so dass $t \in I(y)$ ist, für alle $y \in U$. Es ist also $U \subseteq G_t$ und damit $G_t \subseteq G$ offen. Wegen $0 \in I(x)$, für alle $x \in G$, ist $G_0 = G$ und $\varphi^0 = \text{id}_G$. Ist nun $x \in G_t$, also $t \in I(x)$, so wissen wir, dass $s \in I(\varphi^t(x))$ ist, genau wenn $t + s \in I(x)$ ist. Es folgt, dass $-t \in I(\varphi^t(x))$ ist, da $t + (-t) = 0 \in I(x)$ ist. Deshalb ist $\varphi^t(x) \in G_{-t}$. Zudem wissen wir, dass in dem Fall $s \in I(\varphi^t(x))$ gilt (siehe Aufgabe-31):

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Für unseren Fall $s = -t$ liefert das

$$\varphi^{-t}(\varphi^t(x)) = \varphi^{-t+t}(x) = \varphi^0(x) = x = \text{id}(x),$$

und die Anwendung auf $-t$ statt t liefert ebenso

$$\varphi^t(\varphi^{-t}(x)) = \text{id}(x).$$

Es ist also $\varphi^t: G_t \rightarrow G_{-t}$ ein Diffeomorphismus mit Inversem

$$(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}.$$

(b) Wir wissen schon, dass $\varphi^0 = \text{id}_G$ ist und dass für festes $t \in I(x)$ gilt:

$$s \in I(\varphi^t(x)) \Leftrightarrow s + t \in I(x),$$

und in diesem Fall

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Für alle $x \in G_t \cap (\varphi^t)^{-1}(G_s \cap G_{-t})$ ist also die linke Seite definiert und dann auch die rechte. (Beachte, dass das umgekehrt nicht so ist.) Es gilt also

$$\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t} \quad \text{auf } G_t \cap (\varphi^t)^{-1}(G_s \cap G_{-t}).$$

Und das für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 52. Berechnen Sie die charakteristischen Exponenten der Gleichgewichtslage $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ beim

(a) harmonischen Oszillator $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\omega > 0$);

(b) bei der gedämpften (harmonischen) Schwingung $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\omega > 0, \gamma > 0$);

(c) beim mathematischen Pendel $\ddot{x} + \sin x = 0$;

(d) und bei der (oberen) Gleichgewichtslage $q = (\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$ des mathematischen Pendels.

Lösungsvorschlag. (a) Für den harmonischen Oszillator haben wir für das induzierte System $\dot{\xi} = A\xi$ auf \mathbb{R}^2 , dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Für $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\xi \mapsto A\xi$, ist natürlich $Df(0) = A$, und die Eigenwerte von A sind die Nullstellen von

$$\chi_A(t) = t^2 + \omega^2.$$

Also sind die charakteristischen Exponenten $\lambda_{1/2} = \pm i\omega$.

(b) Im Falle der Dämpfung erhalten wir die charakteristische Gleichung (bei $\gamma > 0$ und $\omega > 0$)

$$t^2 + \gamma t + \omega^2 = 0,$$

also als charakteristische Exponenten

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

mit $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$. Je nachdem, ob $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ oder $\Delta > 0$ ist, bekommt man zwei Exponenten auf \mathbb{R}_- oder zwei nicht-reelle konjugiert komplexe Exponenten. Das Verhalten *verzweigt* bei $\Delta = 0$ in dem doppelten charakteristischen Exponenten $-\gamma/2$. (Immer ist $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, also ein Attraktor, was wir schon wissen.)

(c) Im Falle des mathematischen Pendels ist $\dot{\xi} = f(\xi)$ auf \mathbb{R}^2 mit $f(x, y) = (y, -\sin x)$ für $\xi = (x, y)$. Es folgt

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristischen Exponenten sind (wie im Falle des harmonischen Oszillators bei $\omega = 1$, der seine Linearisierung im Nullpunkt darstellt) $\lambda_{1/2} = \pm i$.

(d) In der oberen (instabilen) Gleichgewichtslage $(x, y) = (\pi, 0)$ ist dagegen

$$Df(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit seinen beiden Eigenwerten ± 1 . (Ein so genannter *hyperbolischer Punkt*.)