Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
09.08.2021
Klausur

Musterlösung zur Klausur „Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen“

Aufgabe 1. Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z}\right).$$

(a) Begründen Sie, warum f holomorph ist, aber keine Stammfunktion hat.

(b) Geben Sie ein (möglichst großes) Gebiet $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ an, wo $f|G$ eine Stammfunktion $F: G \to \mathbb{C}$ hat und geben Sie eine Abbildungsvorschrift für F an. Begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Der erste Teil der Quotientenregel für holomorphe Funktionen besagt, dass für zwei holomorphe Funktionen $f, g: G \to \mathbb{C}$ (mit einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$) auch ihr Quotient $Q = f/g: G \setminus N \to \mathbb{C}$ holomorph ist; dort, wo er definiert ist ($N = \{z \in G : g(z) = 0\}$). Insbesondere ist also eine rationale Funktion als Quotient zweier Polynome $p, q \in \mathbb{C}[z]$ $(q \neq 0)$ holomorph. Das ist bei unserem f hier so.

Betrachten wir nun den Weg $\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$, der den Rand der Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ positiv durchläuft, $\gamma(t) = \exp(it)$. Dann wissen wir, dass

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

und

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-2} = 0$$

ist, weil die Funktion $z \mapsto 1/(z-2)$ auf $D := B_{3/2}(0)$ holomorph ist und daher das Integral über jeden geschlossenen Weg in der Kreisscheibe D verschwindet. Insgesamt erhält man also damit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = -\pi i \neq 0,$$

und daher kann f auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ keine Stammfunktion haben.

(b) Wir betrachten $G := (\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}) \setminus N$ mit

$$N = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) = 0, \ \mathrm{Re}(z) \leq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) \geq 2\}.$$

Dieses Gebiet ist sternförmig bzgl. des Punktes $z_0 = 1 \in G$. Daher hat $f|G\colon G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion, die z.B. durch $F\colon G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$$

gegeben ist, wo $\gamma_z\colon [0,1] \to G$ den geradlinigen Weg von z_0 nach z bezeichnet, $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$. (Dieses Gebiet ist auch maximal, denn würde man einen einzigen Punkt $p \in N$ noch mit hinzunehmen, so gäbe es einen geschlossenen Weg γ in diesem vergrößerten Gebiet durch p und um $q = 0$ oder $q = 2$ herum mit $\int_\gamma f(z)\, dz \neq 0$. f könnte also darauf keine Stammfunktion haben.)

[*Anmerkung.* Es gibt andere maximale Gebiete $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0,2\}$, auf denen $f|G$ eine Stammfunktion hat. Z.B. ist auch

$$G = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z) = 0,\ 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 2\}$$

ein solches. Alledings ist das Argument dafür etwas tiefliegender, weil G nicht sternförmig (und auch nicht *einfach zusammenhängend*) ist. Es gilt nämlich für den Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to G$ um das gesamte Intervall $[0,2] \subseteq \mathbb{C}$ herum, $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, mit dem Residuensatz:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

weil die Summe der beiden Residuen in $z = 0$ und $z = 2$ gleich Null ist,

$$\mathrm{res}_0(f) = -\frac{1}{2}, \quad \mathrm{res}_2(f) = \frac{1}{2}.$$

Das Gleiche gilt dann für jeden geschlossenen Weg in G. Dazu kann man z.B. den *Residuensatz in der Umlaufzahlversion* benutzen oder den *Cauchyschen Integralsatz für nullhomotope Wege*, weil jeder Weg in G homotop zu einnem ganzzahligen Vielfachen von γ ist. Deshalb hat $f|G$ eine Stammfunktion. Dass G maximal ist, sieht man wie bei dem G in der Lösung von oben.]

Aufgabe 2. Wir defnieren den *komplexen Cosinus hyperbolicus* $\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und den *komplexen Sinus hyperbolicus* $\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}.$$

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren, und warum cosh und sinh holomorph sind.

(b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\cosh'(z) = \sinh(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

Lösungsvorschlag. (a) Die Reihe für cosh ist offenbar der *gerade Anteil* der Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n,$$

und die Reihe für sinh der ungerade Anteil von exp. D.h.

$$\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$$

und wegen $\cosh(-z) = \cosh(z)$, $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ ist auch

$$\exp(-z) = \cosh(z) - \sinh(z).$$

Daraus erhält man (zunächst, wie auch bei den bisherigen Gleichungen, als Gleichungen zwischen formalen Potenzreihen)

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) \tag{1}$$

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)). \tag{2}$$

Weil die Exponentialreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert, sieht man daraus, dass auch die Reihen für cosh und sinh auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren. Die Gleichungen (1) und (2) zeigen auch, dass die induzierten Funktionen $\cosh, \sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph sind.

[*Anmerkung.* Alternativ kann man argumentieren, dass man den reellen cosh und sinh schon kennt einschließlich ihrer Potenzreihenentwicklung, die für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Daher sind die Konvergenzradien unendlich und damit konvergiert die komplexe Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Als durch konvergente Potenzreihen definierte Funktionen sind cosh und sinh dann auf ganz $\mathbb{C}$ auch bekanntermaßen (wegen der kompakten Konvergenz der Partialsummen) holomorph.]

(b) Wir können die Gleichungen (1) und (2) auch für die Ableitungen benutzen, denn wir wissen bereits, dass

$$\exp'(z) = \exp(z)$$

ist, für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit den üblichen Rechenregeln für die Differentiation ist dann

$$\cosh'(z) = \frac{1}{2}(\exp'(z) + (-1)\exp'(-z)) = \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) = \sinh(z)$$

und

$$\sinh'(z) = \frac{1}{2}(\exp'(z) - (-1)\exp'(-z)) = \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)) = \cosh(z).$$

[*Anmerkung.* Alternativ kann man auch den Satz von Weierstraß benutzen und unter dem Summenzeichen summandenweise differenzieren.]

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion f auf $\mathbb{C}$, die durch

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass f nur isolierte Singularitäten hat, bestimmen Sie diese und berechnen Sie ihre Residuen dort.
(b) Zeigen Sie, dass für alle $r \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}\pi$ gilt:

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{\sin z} = \pm 2\pi i.$$

Lösungsvorschlag. (a) Die holomorphe Funktion $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat ihre Nullstellen bei $z_k = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) und diese sind isoliert, d.h., es gibt offene Umgebungen $U_k \subseteq \mathbb{C}$ von z_k, so dass nur z_k eine Nullstelle von $\sin|U_k$ ist. Man kann z.B. $U_k = B_1(z_k)$ wählen. (Anm.: Nach dem Identitätssatz müssen die Nullstellen einer nicht-trivialen holomorphen Funktion isoliert liegen.) Da f seine Singularitäten in den Nullstellen von sin hat, sind diese also isoliert und liegen bei z_k ($k \in \mathbb{Z}$). Wegen

$$\sin'(z_k) = \cos(z_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$$

sind die Nullstellen z_k von sin alle einfach und damit hat f in z_k einen einfachen Pol, für alle $k \in \mathbb{Z}$. Das Residuum von f in z_k ist dann (für alle $k \in \mathbb{Z}$)

$$\operatorname{res}_{z_k}(f) = \frac{1}{\sin'(z_k)} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k.$$

(b) Ist $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\pi$, so liegen auf dem Rand von $B_r(0) \subseteq \mathbb{C}$ keine Singularitäten von f und innerhalb von $B_r(0)$ liegen die die isolierten Singularitäten z_k mit $|k| < r/\pi$. Nun gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{res}_{z_k}(f) + \operatorname{res}_{z_{-k}}(f) = (-1)^k + (-1)^{-k} = 2(-1)^k.$$

Nach dem Residuensatz ist daher

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{\sin z} = 2\pi i \sum_{|k|<r/\pi} \operatorname{res}_{z_k}(f) = 2\pi i \left((-1)^0 + \sum_{k=1}^{n_r} 2(-1)^k \right)$$

mit $n_r := [r/\pi]$ (der größten ganzen Zahl kleiner als r/π). Da

$$\sum_{k=1}^{n_r} (-1)^k = -1 + 1 - 1 \pm \cdots + (-1)^{n_r}$$

gleich 0 oder -1 ist, je nachdem, ob $[r/\pi]$ gerade oder ungerade ist, ist

$$(-1)^0 + \sum_{k=1}^{n_r} 2(-1)^k = 1 \text{ oder } -1.$$

Also ist

$$\int_{|z|=r} \frac{dz}{\sin z} = \pm 2\pi i,$$

für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\pi$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die nicht-autonome, lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} - x = e^t \tag{3}$$

auf $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{x} - x = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von (3) mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten und dann die allgemeine Lösung von (3).

Lösungsvorschlag. (a) Der Lösungsraum $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der linearen Gleichung $\dot{x} = x$ auf $\mathbb{R}$ ist 1-dimensional und wir kennen bereits eine (nicht-triviale) Lösung $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich $\varphi(t) = e^t$. (Alternativ kann man diese mit der Methode der Trennung der Variablen berechnen.) Alle Lösungen, d.i. die Elemente von $L_{(h)}$, werden deshalb durch

$$x(t) = ce^t \quad (c \in \mathbb{R})$$

gegeben.

(b) Eine spezielle Lösung von (3) erhält man durch die Methode der Variation der Konstanten mit dem Ansatz $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = u(t)\varphi(t)$, und der „variierenden Konstanten" $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$u(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(s) e^s \, ds = \int_0^t \frac{1}{e^s} e^s \, ds = t,$$

also $\psi(t) = te^t$. Die allgemeine Lösung von (3) ist daher durch

$$x(t) = \psi(t) + c\varphi(t) = te^t + ce^t = (t + c)e^t$$

gegeben.

Aufgabe 5. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0 \tag{4}$$

(mit $\alpha > 0$) auf $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung von (4) an und begründen Sie dies.

(b) Bestimmen Sie auf dem Phasenraum $G = \mathbb{R}^2$ ein 1. Integral $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für das von (4) induzierte System auf $\mathbb{R}^2$ und diskutieren Sie die Niveaulinien von H und die Dynamik auf ihnen. Machen Sie eine Skizze des Phasendiagramms.

Lösungsvorschlag. (a) Durch den Exponentialansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ erhalten wir aus (4) die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \alpha^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \pm\alpha.$$

Damit erhalten wir zwei Lösungen $\varphi_1, \varphi_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von (4),

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-\alpha t},$$

die auch linear unabhängig sind, da ihre Wronski-Determinante $\Delta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Delta(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \dot{\varphi}_2(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{\alpha t} & e^{-\alpha t} \\ \alpha e^{\alpha t} & -\alpha e^{-\alpha t} \end{pmatrix} = -2\alpha \neq 0,$$

nicht verschwindet. Nach der allgemeinen Theorie ist aber die Lösungsmenge $L_{(h)} \subseteq \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein 2-dimensionaler Unterraum von $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, weshalb die allgemeine Lösung von (4)

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

ist. (Alternativ bildet auch $(\cosh(\alpha t), \sinh(\alpha t))$ eine Basis von $L_{(h)}$.)

(b) Der Phasenraum des von (4) induzierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \alpha^2 x \end{aligned}$$

ist $G = \mathbb{R}^2$ und ein 1. Integral bei der Newtonschen Gleichung $m\ddot{x} = f(x)$ (bei $m > 0$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar) ist durch $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $H(x,y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x)$ gegeben, wenn $V'(x) = -f(x)$ (bei $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar) ist. In unserem Fall ist $m = 1$ und $f(x) = \alpha^2 x$. Wir können daher $V(x) = -\frac{1}{2}\alpha^2 x^2$ wählen und erhalten also mit

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2$$

ein 1. Integral. Für $c = 0$ besteht die Niveaulinie $\{H = c\}$ aus dem „Kreuz“

$$H(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = \alpha^2 x^2 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\alpha x,$$

also aus den beiden Ursprungsgeraden $L_\alpha = \{y = \alpha x\}$ und $L_{-\alpha} = \{y = -\alpha x\}$. Der Schnittpunkt $0 \in L_\alpha \cap L_{-\alpha}$ ist (die einzige) Gleichgewichtslage des Systems. Außerhalb besteht die Dynamik aus vier weiteren Bahnen. Die beiden auslaufenden Lösungen $x(t) = \pm(e^{\alpha t}, \alpha e^{\alpha t})$ auf L_α und die beiden einlaufenden Lösungen $x(t) = \pm(e^{-\alpha t}, -\alpha e^{-\alpha t})$ auf $L_{-\alpha}$. Für $c < 0$ erhält man als Niveaulinien mit $c =: -b^2$

$$\begin{aligned} H(x,y) = c \;&\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 = -b^2 \;\Leftrightarrow\; \frac{\alpha^2 x^2}{2b^2} - \frac{y^2}{2b^2} = 1 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{x^2}{(\sqrt{2}\frac{b}{\alpha})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2}b)^2} = 1, \end{aligned}$$

welches eine Hyperbel in Normalform mit Hauptachsenlängen $\sqrt{2}\frac{b}{\alpha}$ und $\sqrt{2}b$ ist. Ihre beiden Äste liegen links und rechts des Kreuzes und schmiegen sich dem Kreuz immer mehr an: L_α und $L_{-\alpha}$ sind ihre Asymptoten. Da keine Gleichgewichtslagen auf $\{H = c\}$ für $c \neq 0$ liegen, gibt es auf jedem Ast eine Bahn, die für große t gegen L_α läuft. (Eine dieser Lösungen (zu $c = -\frac{\alpha^2}{2}$ und $x(0) > 0$) ist übrigens $x(t) = (\cosh(\alpha t), \alpha\sinh(\alpha t))$.) Für $c > 0$ und $b := \sqrt{c}$ ist analog

$$H(x,y) = c \;\Leftrightarrow\; -\frac{x^2}{(\sqrt{2}\frac{b}{\alpha})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2}b)^2} = 1,$$

ebenfalls einer Hyperbel (in Normalform, wenn man die Koordinaten x und y vertauscht). Wir erhalten also zwei Hyperbeläste, die sich dieses Mal von oben bzw. unten dem Kreuz nähern. Auf jedem Ast befindet sich eine Bahn, die sich für $t \to \infty$ der Asymptote L_α nähert.

Skizze des Phasendiagramms:

Aufgabe 6. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\exp(A)$.

(b) Bestimmen Sie alle $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ mit $\exp(A) = \mathbf{1}$ und begründen Sie.

Lösungsvorschlag. (a) Um $\exp(A) \in \mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ zu berechnen, diagonalisieren wir A über $\mathbb{C}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{1} - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 2\pi \\ -2\pi & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4\pi^2.$$

Die Eigenwerte von A sind damit $\lambda_1 = 2\pi i$ und $\lambda_2 = -2\pi i$ und ihre (algebraischen) Vielfachheiten sind jeweils 1. A ist daher (über $\mathbb{C}$) zu

$$D = \mathrm{diag}(2\pi i, -2\pi i)$$

diagonalisierbar, d.h.: Es gibt ein $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ mit

$$S^{-1}AS = D.$$

In den Spalten von S stehen Eigenvektoren von A, die wir aber in diesem Fall nicht zu berechnen brauchen, denn aus $A = SDS^{-1}$ sehen wir nun direkt, dass

$$\exp(A) = S\exp(D)S^{-1} = S \cdot \mathrm{diag}(e^{2\pi i}, e^{-2\pi i}) \cdot S^{-1} = S \cdot \mathbf{1} \cdot S^{-1} = \mathbf{1}$$

ist, weil die Einheitsmatrix mit allen Matrizen vertauscht.

(b) Dadurch vielleicht motiviert sehen wir nun, dass durch

$$D_{kl} := \mathrm{diag}(2\pi i \cdot k, 2\pi i \cdot l) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

in jedem Fall Urbilder von $\mathbf{1}$ unter exp definiert sind, denn $e^{2\pi i k} = 1$, für alle $k \in \mathbb{Z}$, und daher

$$\exp(D_{kl}) = \mathrm{diag}(e^{2\pi i k}, e^{2\pi i l}) = \mathbf{1}.$$

Damit sind aber auch alle Konjugierten $SD_{kl}S^{-1} \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ Lösungen von $\exp(A) = \mathbf{1}$ in $\mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$, denn

$$\exp(SD_{kl}S^{-1}) = S\exp(D_{kl})S^{-1} = S \cdot \mathbf{1} \cdot S^{-1} = \mathbf{1}.$$

Das heißt, dass alle diagonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ mit Eigenwerten in $2\pi i\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ Lösungen sind. Aber sind das auch alle? Ist A nicht diagonalisierbar, so hat A eine Jordanform

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gibt also ein $S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ mit $A = S^{-1}JS$. Es folgt, dass $\exp(A)$ konjugiert zu $\exp(J)$ ist,

$$\exp(A) = S^{-1}\exp(J)S.$$

Aber $J = \lambda\mathbf{1} + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sowie $[\lambda\mathbf{1}, N] = 0$ und $N^2 = 0$. Damit ist

$$\exp(J) = \exp(\lambda\mathbf{1})\exp(N) = \mathrm{diag}(e^\lambda, e^\lambda) \cdot (\mathbf{1} + N) = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix},$$

welches (für kein $\lambda \in \mathbb{C}$) die Einheitsmatrix ist, da $e^\lambda \neq 0$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, ist. Damit ist $\exp(A)$ nie konjugiert zu $\mathbf{1}$, insbesondere ungleich $\mathbf{1}$. Es gilt also:

$$\exp^{-1}(\mathbf{1}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} : \ \exists k, l \in \mathbb{Z}, \exists S \in \mathrm{GL}_2\mathbb{C} : \ A = S^{-1}D_{kl}S\}.$$