

## Portfolio

### zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

**Frage 01.** Was ist eine (reelle oder komplexe) formale Potenzreihe und welche Information trägt der Konvergenzradius der Reihe?

**Frage 02.** Was ist eine komplexe Zahl und warum gilt für die imaginäre Einheit  $i$ , dass  $i^2 = -1$  ist?

**Frage 03.** Erläutern Sie, wie man Addition und Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch interpretieren kann.

**Frage 04.** Was ist eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet der komplexen Zahlen und welche Rolle spielen dabei die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen?

**Frage 05.** Wie erklärt man die Wirtinger-Ableitungen einer reell-differenzierbaren Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ , (wo  $G \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet ist) und was haben sie mit der eventuellen Holomorphie von  $f$  zu tun?

**Frage 06.** Geben Sie einige holomorphe und auch einige nicht-holomorphe Funktionen auf Gebieten von  $\mathbb{C}$  an und begründen Sie.

**Frage 07.** Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow G$  ein stetig differenzierbarer Weg in einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Erläutern Sie, wie das komplexe Wegintegral  $\int_{\gamma} f(z) dz$  für eine stetige Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  erklärt wird.

**Frage 08.** Warum kann die holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = 1/z$ , keine Stammfunktion haben?

**Frage 09.** Sei  $f$  eine stetige (komplexwertige) Funktion auf einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Was ist eine Integralfunktion  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f$  und wann ist sie eine Stammfunktion von  $f$ ?

**Frage 10.** Wann hat ein stetiges  $f$  auf einer Kreisscheibe bereits eine Stammfunktion? Erläutern Sie.

**Frage 11.** Formulieren Sie das Lemma von Goursat und erläutern Sie es.

**Frage 12.** Was ist der Hauptzweig des Logarithmus? Erläutern Sie.

**Frage 13.** Formulieren Sie die Cauchysche Integralformel für holomorphe Funktionen und kommentieren Sie etwas.

**Frage 14.** Warum ist die Ableitung einer holomorphen Funktion selber auch wieder holomorph? Erzählen Sie ein bisschen.

**Frage 15.** Was besagen die Cauchy-Abschätzungen und warum folgt daraus der Satz von Liouville?

**Frage 16.** Was besagt der Fundamentalsatz der Algebra und warum folgt er aus dem Satz von Liouville?

**Frage 17.** Was besagt der Satz von Weierstraß für Folgen holomorpher Funktionen? Erläutern Sie.

**Frage 18.** Erläutern Sie die Formel von Hadamard für den Konvergenzradius einer komplexen formalen Potenzreihe.

**Frage 19.** Sei  $f: B_R \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die durch eine Potenzreihe vom Konvergenzradius  $R \in (0, \infty)$  gegeben ist. Erläutern Sie, warum  $f$  holomorph ist und warum man unter der Summe differenzieren darf.

**Frage 20.** Wann heißt eine Funktion  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  komplex-analytisch und warum sind solche holomorph?

**Frage 21.** Warum sind holomorphe Funktionen komplex-analytisch? Erläutern Sie etwas.

**Frage 22.** Was besagt der Identitätssatz für holomorphe Funktionen? Formulieren Sie ihn.

**Frage 23.** Formulieren und erläutern Sie den Cauchyschen Integralsatz für holomorphe Funktionen.

**Frage 24.** Was ist eine Laurent-Reihe, wie sieht ihr Konvergenzbereich aus und warum definiert sie dort eine holomorphe Funktion?

**Frage 25.** Warum ist eine holomorphe Funktion auf einem Ringgebiet in eine Laurentreihe entwickelbar? Erläutern Sie die Hauptgründe dafür.

**Frage 26.** Formulieren und erläutern Sie den Riemannsches Hebbarkeitssatz.

**Frage 27.** Wann nennt man eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion *wesentlich* und was besagt der Satz von Casorati-Weierstraß?

**Frage 28.** Formulieren und erläutern Sie den Residuensatz.

**Frage 29.** Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld auf  $G$ . Erklären Sie, was die gewöhnliche Differentialgleichung ist, die zu  $f$  gehört, und was eine Lösung von ihr ist.

**Frage 30.** Formulieren und erläutern Sie das 2. Newtonsche Gesetz aus mathematischer Sicht.

**Frage 31.** Formulieren und erläutern Sie, was ein Anfangswertproblem für eine (nicht-autonome) gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

**Frage 32.** Können Sie das Verfahren der „Trennung der Variablen“ erläutern? In welcher Situation kann man es anwenden?

**Frage 33.** Formulieren und erläutern Sie den Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

**Frage 34.** Mit welcher Kontraktion auf welchem vollständigen metrischen Raum liefert der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz einer Kurzzeitlösung? Erläutern Sie etwas.

**Frage 35.** Was ist eine maximale Lösung eines Anfangswertproblems und warum gibt es (bei lokal Lipschitz-stetigem Vektorfeld) stets genau eine?

**Frage 36.** Was ist ein Dynamisches System und was haben Dynamische Systeme mit Gewöhnlichen Differentialgleichungen zu tun?

**Frage 37.** Was ist ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen? Erläutern Sie.

**Frage 38.** Was besagt das Gronwallsche Lemma? Formulieren Sie.

**Frage 39.** Formulieren Sie das Langzeitresultat für lineare Systeme und erläutern Sie.

**Frage 40.** Was ist ein Lösungs-Fundamentalsystem für eine lineare Differentialgleichung? Erläutern Sie.

**Frage 41.** Erklären Sie das Verfahren der „Variation der Konstanten“, um eine spezielle Lösung eines inhomogenen linearen Systems zu bekommen.

**Frage 42.** Wie kann man sich die Normalformtheorie für Matrizen  $A \in \text{Mat}_n\mathbb{C}$  zu Nutze machen, um das System  $\dot{z} = Az$  explizit zu lösen? Beschreiben Sie die Vorgehensweise etwas.

**Frage 43.** Wie erklärt man  $e^A$  für eine reelle oder komplexe  $n \times n$ -Matrix ( $n \in \mathbb{N}$ ) und warum ist das wohldefiniert?

**Frage 44.** Zählen Sie einige Eigenschaften von  $\exp: \text{Mat}_n\mathbb{C} \rightarrow \text{GL}_n\mathbb{C}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) auf, die Sie kennen und erläutern Sie.

**Frage 45.** Wie ist das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen erklärt und wann konvergiert es?

**Frage 46.** Erläutern Sie, was die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung bedeutet.

**Frage 47.** Was ist eine Variation von Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung und was ihr zugehöriges Variationsvektorfeld? Erläutern Sie.

**Frage 48.** Was bedeutet die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangswerten für eine gewöhnliche Differentialgleichung und was ist ein natürlicher Kandidat für die Ableitung der Lösung nach den Anfangswerten? Erläutern Sie.

**Frage 49.** Was besagt die differenzierbare Abhängigkeit vom Anfangswert für eine gewöhnliche Differentialgleichung präzise?

**Frage 50.** Was besagt die stetige Abhängigkeit vom Parameter für eine parameterabhängige gewöhnliche Differentialgleichung? Formulieren Sie möglichst präzise.

**Frage 51.** Formulieren und erläutern Sie die Beziehung zwischen (unendlich oft) differenzierbaren Vektorfeldern und (unendlich oft) differenzierbaren dynamischen Systemen auf einem Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ .

**Frage 52.** Wann heißen zwei dynamische Systeme auf einem Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  äquivalent? Was bedeutet dies für die zugehörigen Vektorfelder?

**Frage 53.** Wann heißt eine Gleichgewichtslage eines dynamischen Systems  $+$ -stabil,  $-$ -stabil und wann stabil? Erläutern Sie.

**Frage 54.** Was sind die charakteristischen Exponenten einer Gleichgewichtslage eines dynamischen Systems und warum nennt man sie „Invarianten“?

**Frage 55.** Wann nennt man eine Gleichgewichtslage eines dynamischen Systems eine *Quelle* und wann eine *Senke*?

**Frage 56.** Wie ist der Zusammenhang zwischen Senken und Attraktoren bei dynamischen Systemen?