Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
25.04.2021
Blatt 02

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 04. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ reell-differenzierbar in $a \in G$. Begründen Sie, warum auch $\bar{f}\colon G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(z)}$, in a reell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a)}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(a)}.$$

Aufgabe 05. Seien $D, G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete, $f\colon D \to G \subseteq \mathbb{C}$ in $a \in D$ reell-differenzierbar und $g\colon G \to \mathbb{C}$ in $b = f(a)$ reell-differenzierbar. Begründen Sie, warum $g \circ f\colon D \to \mathbb{C}$ in a rell-differenzierbar ist und zeigen Sie:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z}(a) &= \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial z}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b)\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(a),\\
\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}}(a) &= \frac{\partial g}{\partial w}(b)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(b)\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}(a).
\end{aligned}$$

Aufgabe 06. (a) Stellen Sie eine Produktregel für reell-differenzierbare Funktionen $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) im Wirtinger-Kalkül auf und begründen Sie sie.

(b) Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen der folgenden reell-differenzierbaren Funktionen $f_j\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ($j = 1, .., 4$) und bestimmen Sie, wo diese komplex-differenzierbar sind:

$$f_1(z) = \bar{z}, \quad f_2(z) = |z|^2, \quad f_3(z) = \mathrm{Re}(z), \quad f_4(z) = 2z^2\bar{z} - z\bar{z}^2.$$

Aufgabe 07. (a) Integrieren Sie $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$, über den Weg $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + e^{it}$.

(b) Parametrisieren Sie die geradlinige Verbindungsstrecke von $-1 \in \mathbb{C}$ nach $1 \in \mathbb{C}$ mit einem Weg γ_1 und betrachten Sie mit $\gamma_2\colon [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto e^{i(\pi - t)}$ einen weiteren Weg von -1 nach 1. Integrieren Sie nun die stetige Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = |z|$, über die Wege γ_1 und γ_2.

(c) Zeigen Sie, dass $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = \mathrm{Re}(z)$, keine Stammfunktion hat.

Abgabe: Sonntag, 2. Mai 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor