Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
02.05.2021
Blatt 03

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 08 (Lemma von Goursat für Dreiecke). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\triangle \subseteq G$ ein (abgeschlossenes) Dreieck in G. Zeigen Sie: Ist $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt: $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$. (Hinweis: Gehen Sie so vor wie in der Vorlesung für Rechtecke.)

Aufgabe 09. **(a)** Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. eines Punktes $a \in G$ (d.h.: für jedes $z \in G$ ist der geradlinige Weg $\gamma_z\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto (1-t)a + tz$, ganz in G. Sei weiter $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig und derart, dass für alle Dreiecke $\triangle \subseteq G$ gilt: $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$. Zeigen Sie, dass dann durch $F\colon G \to \mathbb{C}$,

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\; d\zeta,$$

eine Stammfunktion von f gegeben ist.

(b) Zeigen Sie nun (Cauchys Integralsatz für sternförmige Gebiete): Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden geschlossenen Weg γ in G: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Aufgabe 10. Sei $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \neq 0 \text{ oder } \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und γ_z für jedes $z \in G$ der geradlinige Weg von 1 nach z in G. Wir nennen dann $\log\colon G \to \mathbb{C}$,

$$\log(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

den *Hauptzweig des Logarithmus*.

(a) Zeigen Sie, dass log ein Zweig des Logarithmus ist, d.h.: Für alle $z \in G$ ist $\exp \circ \log(z) = z$.

(b) Für jedes $z \in G$ sei $\arg(z) \in (-\pi, \pi)$ der Winkel in $(-\pi, \pi)$, so dass $z = |z|e^{i\arg(z)}$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $z \in G$ gilt:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z).$$

(Hinweis: Ersetzen Sie in der Definition den Weg γ_z durch den stückweise glatten Weg, der zunächst geradlinig von 1 nach $|z|$ läuft und dann auf dem Kreisbogen vom Radius $r = |z|$ von $|z|$ zu z (auf dem kürzesten Weg) und benutzen Sie Aufgabe 2b.)

(c) Geben Sie zwei Zahlen z_1, z_2 in G an, so dass auch $z_1 z_2$ in G ist und gilt:

$$\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2).$$

Aufgabe 11. Wir definieren $\cos, \sin \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad \sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

und nennen diese Funktionen den *komplexen Cosinus* und den *komplexen Sinus*.

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ \cos z &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\ \sin z &= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \\ \cos^2 z + \sin^2 z &= 1. \end{aligned}$$

(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen $D = \{z \in \mathbb{C} : \cos z = 0\}$ von cos und setzen Sie $\tan \colon \mathbb{C} \setminus D \to \mathbb{C}$, $\tan z := \sin z / \cos z$. zeigen Sie dann, dass cos, sin und tan holomorph sind mit

$$\cos' = -\sin, \quad \sin' = \cos, \quad \tan' = 1 + \tan^2.$$

(Hinweis: Benutzen Sie, dass $e^z = 1 \Leftrightarrow z \in 2\pi i \mathbb{Z}$ und $\exp' = \exp$ ist.)

Abgabe: Sonntag, 9. Mai 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor