Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
09.05.2021
Blatt 04

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 12. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie dass $u := \mathrm{Re}(f)\colon G \to \mathbb{R}$ und $v := \mathrm{Im}(f)\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch sind. (v heißt dann *konjugiert harmonisch zu u.*)

(b) Sei nun $G \subseteq \mathbb{C}$ sogar sternförmiges Gebiet und $u\colon G \to \mathbb{R}$ harmonisch, $\triangle u = 0$. Zeigen Sie, dass es ein holomorphes $f\colon G \to \mathbb{C}$ gibt mit $\mathrm{Re}(f) = u$. (Hinweis: Betrachten Sie $g\colon G \to \mathbb{C}$, $g = \partial_x u - i\partial_y u$.)

Aufgabe 13. (a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein (stetiger) Weg. Zeigen Sie, dass es ein stetiges $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{i\varphi(t)}.$$

(Hinweis: Sei $D_1 := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $D_2 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$. Man zerlege $[0,1]$ so in endlich viele Teilintervalle $[t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, \ldots, m$; $t_0 = 0$, $t_m = 1$), dass $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ in D_1 oder in D_2 liegt. Dann benutze man für $\varphi|[t_{j-1}, t_j]$ einen Zweig des Logarithmus $\log_1\colon D_1 \to \mathbb{C}$ bzw. $\log_2\colon D_2 \to \mathbb{C}$.)

(b) Seien $\varphi, \psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wie in (a) zwei solche *Lifts*. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass für alle $t \in [0,1]$ gilt:

$$\psi(t) = \varphi(t) + 2\pi k.$$

(Hinweis: Eine stetige Funktion $k\colon [0,1] \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ muss konstant sein.)

(c) Sei $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}^*$ nun ein *geschlossener* Weg. Man definiert *die Umlaufzahl $n(\gamma) \in \mathbb{Z}$ (bzgl. 0)* nach Wahl eines Lifts wie unter (a) durch $n(\gamma) := \frac{1}{2\pi}(\varphi(1) - \varphi(0))$. Begründen Sie, warum $n(\gamma)$ tatsächlich ganzzahlig ist und warum sie wohldefiniert ist (d.h.: nicht von der Wahl des Lifts abhängt.) Zeigen Sie dann für den Fall, dass γ sogar stetig differenzierbar ist:

$$n(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

Aufgabe 14. Sei $G \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet und $\log\colon G \to \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus auf G. Sei weiter $a \in \mathbb{C}$. Man definiert *den zu* $\log$ *gehörenden Zweig der a. Potenz auf G* durch $\mathrm{pot}_a\colon G \to \mathbb{C}$,

$$\mathrm{pot}_a(z) = \exp(a \cdot \log(z)) =: z^a.$$

(a) Berechnen Sie alle möglichen Werte von i^i, 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$. (Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass sich zwei Zweige des Logarithmus nur durch eine konstante Funktion $2\pi i \cdot k$, mit $k \in \mathbb{Z}$, unterscheiden können (vgl. auch Aufgabe-13-b).)

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Man nennt eine stetige Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ *einen Zweig der n. Wurzel auf G*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $f(z)^n = z$. Zeigen Sie, dass es für einen solchen Zweig eine n. Einheitswurzel $\omega \in \mathbb{C}^*$ (siehe Aufgabe-01) gibt, so dass für alle $z \in G$ gilt:

$$f(z) = \omega \exp(\frac{1}{n} \log(z)).$$

Abgabe: Sonntag, 16. Mai 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor