Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
16.05.2021
Blatt 05

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 15. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht-konstant. Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt. (Erinnerung: $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt *dicht*,, wenn für jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $U \neq \emptyset$ gilt: $D \cap U \neq \emptyset$. Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Liouville.)

Aufgabe 16. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und es existiere $n \in \mathbb{N}_0$, $R > 0$, $M > 0$ so, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ gilt:

$$|f(z)| \leq M|z|^n.$$

Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion vom Grad kleiner oder gleich n ist. (Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Ungleichungen, dass $f^{(n+1)} = 0$ ist.)

Für eine formale (komplexe) Potenzreihe $P = \sum_0^\infty a_n X^n$ definiert man ihre *formale Ableitung* durch

$$P' := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} X^n.$$

Aufgabe 17. Sei P eine formale Potenzreihe und $R_P \in [0, \infty]$ ihr Konvergenzradius. Zeigen Sie: $R_{P'} = R_P$.

Wir nennen eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ ($G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet) einen *Zweig des Arcustangens*, wenn für alle $z \in G$ gilt: $\tan \circ f(z) = z$.

Aufgabe 18. (a) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}\colon \exists t \in \mathbb{R}\colon |t| \geq 1 \text{ und } z = it\}$ und $\operatorname{Arctan}\colon D \to \mathbb{C}$,

$$\operatorname{Arctan}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

wo γ_z der geradlinige Weg von 0 nach z ist. Zeigen Sie, dass Arctan ein Zweig des Arcustangens ist. (Wir nennen ihn den *Hauptzweig*.)

(b) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ wie unter (a), $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$ und $\operatorname{Log}\colon G \to \mathbb{C}$ der Hauptweig des Logarithmus. Zeigen Sie zunächst, dass $g\colon \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$, das Gebiet D nach G abbildet und dann für alle $z \in D$:

$$\operatorname{Arctan}(z) = \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$

Abgabe: Sonntag, 23. Mai 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor