Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
30.05.2021
Blatt 06

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Ein topologischer Raum X heißt

- *zusammenhängend*, wenn gilt: Sind $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $U \cap V = \emptyset$, so muss $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ sein;
- *wegzusammenhängend*, wenn gilt: Für alle $x_0, x_1 \in X$ gibt es einen Weg $\alpha\colon I \to X$ (d.h.: α ist stetig, wo $I = [0,1]$ das Einheitsintervall mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie ist) mit $\alpha(0) = x_0$ und $\alpha(1) = x_1$.

Aufgabe 19. (a) Sei X ein zusammenhängender Raum. Zeigen Sie: Ist $A \subseteq X$ nicht-leer, abgeschlossen und offen, so ist $A = X$.

(b) Zeigen Sie: $I = [0,1]$ ist zusammenhängend. (Hinweis: Ist $I = U \mathbin{\dot\cup} V$ und o.E. $0 \in U$, so betrachte

$$b := \sup\{x \in I:\ [0,x] \subseteq U\}.)$$

(c) Zeigen Sie: Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.

Aufgabe 20. Beweisen Sie folgende Variante des Identitätssatzes: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $a \in G$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f^{(n)}(a) = 0$. Dann ist f konstant. (Hinweis: Betrachten Sie die Teilmenge $A := \{z \in G\colon f^{(n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}$ und zeigen Sie, dass diese nicht-leer, abgeschlossen und offen ist.)

Aufgabe 21. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $F\colon [a,b] \times G \to \mathbb{C}$, $(t,z) \mapsto F(t,z)$, stetig. Zudem sei $F_t\colon G \to \mathbb{C}$, $F_t(z) := F(t,z)$, für jedes $t \in [a,b]$ reell-differenzierbar, und $D_2F\colon [a,b] \times G \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, $D_2F(t,z) = DF_t(z)$, sei stetig. Zeigen Sie, dass dann $H\colon G \to \mathbb{C}$,

$$H(z) = \int_a^b F(t,z)\,dt,$$

wohldefiniert und reell-differenzierbar ist mit

$$DH(z) = \int_a^b DF_t(z)\,dt, \qquad \forall z \in G.$$

Aufgabe 22. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ unendlich-oft differenzierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann reell-analytisch, wenn es ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit $I \subseteq G$ und einer komplex-analytischen Funktion $\hat{f}: G \to \mathbb{C}$ gibt mit $\hat{f}|I = f$.

Abgabe: Sonntag, 6. Juni 2021, 18 Uhr via „urm" an Ihren Tutor