Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
06.06.2021
Blatt 07

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 23. (a) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in G$ die einzige Nullstelle von g. Weiter sei $g'(a) \neq 0$. Zeigen Sie, dass für $h\colon G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, $h(z) = f(z)/g(z)$, gilt

$$\mathrm{Res}_a(h) = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(b) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten von f und g und dort ihre Residuen:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-\pi)^2}, \qquad g(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

Aufgabe 24. Zeigen Sie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \qquad \int_0^{\pi} \frac{dx}{a + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \quad \text{(für } a > 1\text{)}.$$

(Hinweis für das zweite Integral: Versuchen Sie dieses Integral als ein komplexes Wegeintegral über die Einheitskreislinie zu beschreiben.)

Aufgabe 25 (Null- und Polstellenzähler). **(a)** Sei f eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und $a \in G$ eine Nullstelle von f der Ordnung $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass g, mit $g(z) = f'(z)/f(z)$, eine holomorphe Funktion auf G mit einer isolierten Singularität in a ist und es gilt: $\mathrm{Res}_a(g) = k$.

(b) Sei f nun holomorph auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ mit einem Pol der Ordnung $k \in \mathbb{N}$ in einem Punkt $a \in G$. Zeigen Sie, dass g, mit $g = f'/f$, holomorph mit isolierter Singularität in a ist und es gilt: $\mathrm{Res}_a(g) = -k$.

(c) Eine holomorphe Funktion f auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie höchstens isolierte Singularitäten hat und diese nicht wesentlich sind. Sei nun $K \subseteq G$ Kompaktum mit glattem Rand, f sei meromorph auf G und keine der isolierten Singularitäten und Nullstellen von f liege auf ∂K. Mit $N_0 \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir dann die Gesamtzahl der Nullstellen von f

innerhalb von K, gewichtet jeweils mit ihren Vielfachheiten, $N_0 = \sum_{a \in f^{-1}(0)} \operatorname{ord}_a(f)$. Ähnlich sein $N_\infty \in \mathbb{N}$ die Gesamtzahl der Polstellen von f innerhalb von K, gewichtet mit ihren Vielfachheiten, $N_\infty = \sum_{a \in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}_a(f)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)} = N_0 - N_\infty.$$

Aufgabe 26 (Satz von Rouché). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g \colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $K \subseteq G$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $N(f), N(g) \in \mathbb{N}$ bezeichne die Anzahl der Nullstellen von f bzw. g in K (gezählt mit Vielfachheiten). Schließlich gelte für alle $z \in \partial K$:

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)|.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt: $N(f) = N(g)$. (Hinweis: Betrachten Sie die *Homotopie* $(h_t)_{t \in [0,1]}$ mit $h_t = f + t(g - f)$ und untersuchen Sie $N(h_t)$ in Abhängigkeit von t.)

Abgabe: Sonntag, 13. Juni 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor