Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
13.06.2021
Blatt 08

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Ein *dynamisches System auf* G ist ein stetig differenzierbares $\varphi\colon \Omega \to G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, wobei gilt:

(a) $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times G$ ist offen mit $\{0\} \times G \subseteq \Omega$ und $I(x) := \{t \in \mathbb{R} : (t, x) \in \Omega\}$ ist ein offenes Intervall;

(b) (i) $\varphi^0(x) = x$ für alle $x \in G$;

(ii) Ist $(t, x) \in \Omega$, so ist für $s \in \mathbb{R}$ das Paar $(t + s, x) \in \Omega$, genau wenn $(s, \varphi^t(x)) \in \Omega$ ist, und es gilt dann:

$$\varphi^s(\varphi^t(x)) = \varphi^{s+t}(x).$$

Man nennt dann für jedes $x \in G$ die Kurve $\varphi(x)\colon I(x) \to G$, $t \mapsto \varphi^t(x)$, die *Dynamik von* x.

Aufgabe 27. Sei $\varphi\colon \Omega \to G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Man definiert das *zugehörige Vektorfeld* $f = f_\varphi\colon G \to \mathbb{R}^n$ auf G durch

$$f(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t(x).$$

Zeigen Sie: Für jedes $x_0 \in G$ löst die Kurve $\varphi(x_0)\colon I(x_0) \to G$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0.$$

Aufgabe 28. Sei $\varphi\colon \Omega \to G$ ein dynamisches System auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $a \in G$ heißt *Gleichgewichtslage von* φ, wenn für alle $t \in I(a)$ gilt: $\varphi^t(a) = a$.

(a) Zeigen Sie: ist $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ das zu φ gehörende Vektorfeld, so gilt: $a \in G$ ist genau dann Gleichgewichtslage von φ, wenn $f(a) = 0$ ist. [Nachtrag: Benutzen Sie für die Rückrichtung, dass φ 2-mal stetig differenzierbar und damit f lokal Lipschitz-stetig ist sowie die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems dann nach Picard Lindelöf.]

(b) Sei nun $x_0 \in G$ mit $I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0)$ und $t_+(x_0) = \infty$. Weiter sei $a \in G$ und es gelte

$$\lim_{t\to\infty} \varphi^t(x_0) = a.$$

Zeigen Sie, dass a eine Gleichgewichtslage von φ sein muss.

Aufgabe 29. Wir betrachten das (nur) stetige Vektorfeld $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x|}$, auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

auf $\mathbb{R}$ verschiedene Lösungen $\alpha, \beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 30. Bestimmen Sie mit der Methode der Trennung der Variablen alle maximalen Lösungskurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2$$

und skizzieren Sie das Phasendiagramm auf $\mathbb{R}$.

Abgabe: Sonntag, 20. Juni 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor