Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
20.06.2021
Blatt 09

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 31. Sei $n \in \mathbb{N}$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf G. Sei ferner für jedes $y \in G$ mit $\alpha_y\colon I(y) \to G$ die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y$$

auf G notiert. Sei nun $y_0 \in G$ und $t \in I(y_0)$ sowie $y_1 = \alpha_{y_0}(t)$. Zeigen Sie, dass $s \in I(y_1)$ ist, genau wenn $t + s \in I(y_0)$ ist und dann gilt:

$$\alpha_{y_1}(s) = \alpha_{y_0}(s + t).$$

Aufgabe 32. Für $\omega > 0$ bezeichnet man das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = y_0$$

als „harmonischen Oszillaor“. Bestimmen Sie den Phasenraum G für das Problem und dann das zugehörige maximale dynamische System $\varphi\colon \Omega \to G$ (Hinweis: Machen Sie einen „Ansatz“ für x als Linearkombination der Lösungen $t \mapsto \cos(\omega x)$ und $t \mapsto \sin(\omega x)$.)

Aufgabe 33. Sei $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Zu $x_0 \in G$ sein $\alpha\colon I \to G$ die maximale Lösungskurve zum Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ auf G. Es existiere nun ein $T \in I$ mit $T > 0$, so dass $\alpha(T) = x_0$ ist. (Wenn $T > 0$ die kleinste positive reelle Zahl mit dieser Eigenschaft ist, nennen wir x_0 *einen periodischen Punkt der Periode* T.) Zeigen Sie, dass in diesem Fall $I = \mathbb{R}$ ist und für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\alpha(t + T) = \alpha(t).$$

Aufgabe 34. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\varphi\colon \Omega \to G$, $(t, x) \mapsto \varphi^t(x)$, ein dynamisches System auf G sowie $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ sein zugehöriges Vektorfeld. Eine stetig differenzierbare Funktion $H\colon G \to \mathbb{R}$ heißt *ein* 1. *Integral für* φ, wenn für alle $(t, x) \in \Omega$ gilt: $H(\varphi^t(x)) = H(x)$. Zeigen Sie, dass H genau dann ein 1. Integral ist, wenn *die Ableitung* $X_f H\colon G \to \mathbb{R}$ *von* H *in Richtung* f, d.i.

$$X_f H(x) := \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial H}{\partial x_j}(x),$$

verschwindet, $X_f H = 0$.

Abgabe: Sonntag, 27. Juni 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor