Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
04.07.2021
Blatt 11

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 39. **(a)** Berechnen Sie ein Lösungs-Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie lautet die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Bx$ auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 40. Berechnen Sie eine Basis für den Lösungsraum der Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung (vgl. Aufgabe-38)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

(mit $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$) auf $\mathbb{R}$ nun auch in den folgenden Fällen für die Diskrininante $\Delta = 4\omega^2 - \gamma^2$:

(a) $\Delta > 0$ (Schwingungsfall)

(b) $\Delta = 0$ (aperiodischer Grenzfall)

Aufgabe 41. Ein *Newton-System* auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = f(x) \tag{1}$$

mit $m > 0$ (der Masse eines Teilchens) und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (dem Kraftfeld, in dem sich das Teilchen bewegt).

(a) Ist $V\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $V' = -f$ (ein so genanntes *Potential für* f), so zeigen Sie, dass durch $H\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + V(x),$$

ein 1. Integral für (1) gegeben ist (vgl. Aufgabe-34).

(b) Im Falle des harmonischen Oszillators (vgl. Aufgabe-32) ist $f(x) = -kx$ (mit $k > 0$). Wählen Sie ein Potential für f und beschreiben Sie dann die Niveaulinien für das zugehörige 1. Integral H. Wie sieht die Dynamik des Systems auf den Niveaulinien $\{H = c\}$ (für $c \in \mathbb{R}$) aus? Beschreiben Sie qualitativ.

Aufgabe 42. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$, $A \mapsto e^A$, die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion.

(a) Berechnen Sie e^{A_i} $(i = 1, 2)$ für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie für alle $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{C}$:

$$\det e^A = e^{\mathrm{spur} A},$$

(Hinweis: Erinnern Sie sich, dass die Spalten von $\Phi(t) = e^{tA}$ Lösungs-Fundamentalsystem von $\dot{z} = Az$ sind und Aufgabe-37.)

Abgabe: Sonntag, 11. Juli 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor