Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
11.07.2021
Blatt 12

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 43. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ die (komplexe Matrizen-) Exponentialfunktion.

(a) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ an, so dass

$$\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$$

und begründen Sie dies.

(b) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist $e^\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\exp(A)$.

(c) Begründen Sie, warum $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist und es gilt:

$$D\exp_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Mat}_n\mathbb{C}}.$$

Aufgabe 44. Die Bewegung eines Pendels (mit starrer Stange) unter dem Einfluss der Erdanziehung geschieht (nach Normierung einer Konstanten) durch Lösung der folgenden Differentialgleichung des „mathematischen Pendels“ auf $\mathbb{R}$:

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

(x beschreibt hier das Bogenmaß des Winkels der Auslenkung.)

(a) Geben Sie ein 1. Integral H auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^2$ der Gleichung an (vgl. Aufgabe-41).

(b) Diskutieren Sie nun die Niveaulinien $\{H = c\}$ ($c \in \mathbb{R}$) und die Bahnen, die auf ihnen liegen, qualitativ. Machen Sie eine Skizze des Phasendiagramms.

Aufgabe 45. Seien $\omega, \omega_0, \gamma \in \mathbb{R}_+$. Wir betrachten die Differentialgleichung der „erzwungenen Schwingung“ auf $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe-36)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos(\omega t).$$

(a) Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung. Zeigen Sie, dass sich $x(t)$ für große t immer mehr der erzwungenen Schwingung

$$y(t) = A\cos(\omega t - \alpha)$$

(mit geeigneter *Amplitude* A und *Phasenverschiebung* α*) annähert. (Hinweis: Lösen Sie die komplexe Gleichung mit rechter Seite* $\exp(i\omega t)$ *und gehen Sie dann zum Realteil über.)*

(b) *Bestimmen Sie die allgemeine Lösung im ungedämpften Fall ($\gamma = 0$) nun auch im Falle der Resonanz ($\omega = \omega_0$). (Hinweis: Ansatz: $x(t) = A \cdot t\exp(i\omega t)$.)*

Aufgabe 46. *Sei* $\exp\colon \mathrm{Mat}_n\mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n\mathbb{R}$, $A \mapsto e^A$, *die reelle (Matrizen-) Exponentialfunktion und sei*

$$\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R} = \{S \in \mathrm{GL}_n\mathbb{R} : \ \det S > 0\}.$$

(a) *Zeigen Sie, dass* $\exp(A) \in \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ *ist, für alle* $A \in \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$.

(b *Zeigen Sie, dass* $S = \mathrm{diag}(-1, -4)) \in \mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}$ *nicht im Bild von* $\exp$ *liegt.*

Abgabe: *Sonntag, 18. Juli 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor*