Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
18.07.2021
Blatt 13

Übungen zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ surjektiv ist.

Aufgabe 48. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, $y\colon I \to G$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$ auf G sowie $A\colon I \to \mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$, $A(t) = Df(y(t))$. Zeigen Sie: Zu jeder Lösung $\xi\colon I \to \mathbb{R}^n$ der in y linearisierten Gleichung $\dot{\xi} = A(t)\xi$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine Variation von Lösungen (x_ε) von y, so dass ξ das Variationsvektorfeld von (x_ε) ist.

Aufgabe 49. Sei $r \in [1, \infty]$, f ein $\mathcal{C}^r$-Vektorfeld auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei $x\colon I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Zeigen Sie, dass x eine $\mathcal{C}^{r+1}$-Abbildung ist.

Aufgabe 50. **(a)** Wir betrachten noch einmal (vgl. Aufgabe-40) die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung $(\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+)$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0.y_0) = (0, 0)$ ein Attraktor des Systems ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage $(x_0, y_0) = (0, 0)$ des „mathematischen Pendels“(vgl. Aufgabe-44)

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

stabil, aber kein Attraktor ist.

Abgabe: Sonntag, 25. Juli 2021, 18 Uhr via „urm“ an Ihren Tutor