

## Übungen

### zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen / Mathematik für Physiker IV

**Aufgabe 50.** (a) Wir betrachten noch einmal (vgl. Aufgabe-40) die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung ( $\gamma, \omega \in \mathbb{R}_+$ )

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ein Attraktor des Systems ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  des „mathematischen Pendels“ (vgl. Aufgabe-44)

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

stabil, aber kein Attraktor ist.

**Aufgabe 51.** Sei  $\varphi: \Omega \rightarrow G, (t, x) \mapsto \varphi^t(x)$ , ein dynamisches System auf einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^n$ . Wir setzen für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$G_t := \{x \in G : t \in I(x)\} \subseteq G.$$

(a) Zeigen Sie, dass  $G_t \subseteq G$  offen ist, für alle  $t \in \mathbb{R}$ , und, dass für die Abbildung

$$\varphi^t: G_t \rightarrow G, \quad x \mapsto \varphi^t(x),$$

gilt:  $\text{im}(\varphi^t) = G_{-t}$  und  $\varphi^t: G_t \rightarrow G_{-t}$  ist ein Diffeomorphismus.

(b) Zeigen Sie, dass  $\varphi^0 = \text{id}_G$  ist und für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  (dort, wo beide Seiten der Gleichung definiert sind) gilt:

$$\varphi^s \circ \varphi^t = \varphi^{s+t}.$$

(Man nennt die Familie von Diffeomorphismen  $(\varphi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  den zu  $\varphi$  gehörenden Fluss auf  $G$ .)

**Aufgabe 52.** Berechnen Sie die charakteristischen Exponenten der Gleichgewichtslage  $p = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$  beim

(a) harmonischen Oszillator  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  ( $\omega > 0$ );

(b) bei der gedämpften (harmonischen) Schwingung  $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0$  ( $\omega > 0, \gamma > 0$ );

(c) beim mathematischen Pendel  $\ddot{x} + \sin x = 0$ ;

(d) und bei der (oberen) Gleichgewichtslage  $q = (\pi, 0) \in \mathbb{R}^2$  des mathematischen Pendels.

**Abgabe:** Keine mehr, außer wenn Sie noch Punkte für die Klausurzulassung brauchen. Dann bis 29.07., 12.00 Uhr bei Ihrem Tutor