Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Frank Loose
Jonathan Walz

SoSe 2021
31.07.2021

Klausur zur Einführung in die Funktionentheorie und die Gewöhnlichen Differentialgleichungen

Aufgabe 1. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0,2\}\to\mathbb{C}$,

$$f(z)=\frac{1}{z^2-2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z}\right).$$

(a) Begründen Sie, warum f holomorph ist, aber keine Stammfunktion hat.

(b) Geben Sie ein (möglichst großes) Gebiet $G\subseteq\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$ an, wo $f|G$ eine Stammfunktion $F\colon G\to\mathbb{C}$ hat und geben Sie eine Abbildungsvorschrift für F an. Begründen Sie.

Aufgabe 2. Wir defnieren den *komplexen Cosinus hyperbolicus* $\cosh\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und den *komplexen Sinus hyperbolicus* $\sinh\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ durch

$$\cosh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n},\quad \sinh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}.$$

(a) Begründen Sie, warum das wohldefiniert ist, d.h., warum die Reihen auf ganz $\mathbb{C}$ konvergieren, und warum cosh und sinh holomorph sind.

(b) Zeigen Sie für alle $z\in\mathbb{C}$:

$$\cosh'(z)=\sinh(z),\quad \sinh'(z)=\cosh(z).$$

Aufgabe 3. Wir betrachten die Funktion f auf $\mathbb{C}$, die durch

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass f nur isolierte Singularitäten hat, bestimmen Sie diese und berechnen Sie ihre Residuen dort.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $r\in\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}\pi$ gilt:

$$\int_{|z|=r}\frac{dz}{\sin z}=\pm 2\pi i.$$

Aufgabe 4. Wir betrachten die nicht-autonome, lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} - x = e^t \tag{1}$$

auf $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{x} - x = 0$.

(b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung von (1) mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten und dann die allgemeine Lösung von (1).

Aufgabe 5. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} - \alpha^2 x = 0 \tag{2}$$

(mit $\alpha > 0$) auf $\mathbb{R}$.

(a) Geben Sie allgemeine Lösung von (2) an und begründen Sie dies.

(b) Bestimmen Sie auf dem Phasenraum $G = \mathbb{R}^2$ ein 1. Integral $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für das von (2) induzierte lineare System auf $\mathbb{R}^2$ und diskutieren Sie die Niveaulinien von H und die Dynamik auf ihnen. Machen Sie eine Skizze des Phasendiagramms.

Aufgabe 6. Sei $\exp\colon \mathrm{Mat}_2\mathbb{C} \to \mathrm{GL}_2\mathbb{C}$ die komplexe Matrizen-Exponentialfunktion.

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi \\ 2\pi & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\exp(A)$.

(b) Bestimmen Sie alle $A \in \mathrm{Mat}_2\mathbb{C}$ mit $\exp(A) = \mathbf{1}$ und begründen Sie.