

LINEARE ALGEBRA 1 ÜBUNGSBLATT 1

Aufgabe 1: Schnitt zweier Geraden (25 Punkte)

a) Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 :

$$M_1 = \{(-1, 0) + t(3, 1) : t \in \mathbb{R}\}$$
$$M_2 = \{(4, -7) + t(1, -4) : t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Bestimmen Sie durch Rechnung die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 2: Äquivalenzrelationen (25 Punkte; Teamaufgabe)

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen auf M ? Begründen Sie Ihre Antworten.

- a) $M = \mathbb{Z}$, $a|b$ ("a teilt b") $:\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Z} : ar = b$ c) $M = \mathbb{Z}$, aRb $:\Leftrightarrow |a - b| \leq 1$
b) $M = \mathbb{Q}$, $a \leq b$ d) $M = \mathbb{Q}$, aSb $:\Leftrightarrow a^2 = b^2$

Aufgabe 3: Restklassen und Körper (25 Punkte; Teamaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass \mathbb{Z}_2 ein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass \mathbb{Z}_{15} kein Körper ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass [3] kein multiplikativ Inverses besitzt. Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass in einem Körper \mathbb{K} für jedes $x \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

Aufgabe 4: Funktionenraum (25 Punkte)

Sei M eine Menge und \mathbb{K} ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{K}^M aller Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{K}$ einen Vektorraum über \mathbb{K} bildet, wenn man Addition und Skalarmultiplikation punktweise definiert, d.h. für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathbb{K}^M$ definieren wir

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \quad \forall x \in M.$$

Abgabe: Sie laden einen Scan oder Fotos Ihrer handschriftlichen Lösung als eine PDF-Datei bis 16:00 Uhr am Donnerstag den 29.04.2021 auf <https://urm.math.uni-tuebingen.de> hoch.

Englisch-Vokabeln (freiwillig): Menge = set, Teilmenge = subset, Schnittmenge = intersection, Vereinigungsmenge = union, Funktion = function, eindeutig = unique [juniek], natürliche Zahl = natural number oder positive integer [intedscher], ganze Zahl = integer, reelle Zahl = real number, komplexe Zahl = complex number, imaginäre Zahl = imaginary number, Zahlkörper = (number) field, abelsche Gruppe = Abelian group, reellwertig = real-valued, Äquivalenzrelation = equivalence relation, Restklasse = residue class, Vektor = vector, Matrix (Plural Matrizen) = matrix [mäjtrix] (plural matrices [mäjtriβies]), Polarkoordinaten = polar coordinates [kou-ordinäts], Polynom = polynomial.