

## LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 10

### Aufgabe 39: Paralleler und senkrechter Anteil (25 Punkte)

- Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt,  $W \subseteq V$  ein Unterraum und  $v \in V$  beliebig. Wir betrachten Zerlegungen der Form  $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$  mit  $v_{\parallel} \in W$  und  $\langle w, v_{\perp} \rangle = 0$  für alle  $w \in W$ . Zeigen Sie, dass diese Zerlegung für jedes  $v \in V$  eindeutig ist (es also nicht mehr als eine Möglichkeit für  $v_{\parallel}$  und  $v_{\perp}$  geben kann). Die Existenz der Zerlegung für endlich-dimensionales  $W$  wurde in der Vorlesung gezeigt (Satz 6.13 mit Korollar 6.14(a)).
- Der Vektor  $w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n > 1$ , definiere nun den Unterraum  $W$  durch  $W := \text{span}\{w\} \subset \mathbb{R}^n$ . Außerdem sei  $v \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Finden Sie Formeln für  $v_{\parallel}$  und  $v_{\perp}$  in Begriffen von  $v$  und  $w$ .
- Auf  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir das Skalarprodukt  $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$ . Sei  $W := \text{span}\{(1, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$  und  $v := (2, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$ . Berechnen Sie  $v_{\parallel}$  und  $v_{\perp}$ .

### Aufgabe 40: Projektion (35 Punkte)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension  $n < \infty$ , und seien  $V_1, V_2$  Unterräume mit  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$  und  $V_1 + V_2 = V$ .

- Zeigen Sie, dass jedes  $v \in V$  sich auf eindeutige Weise als  $v = v_1 + v_2$  mit  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_2$  schreiben lässt. Man bezeichnet daher  $P(v) := v_1$  als Projektion von  $v$  auf  $V_1$  entlang  $V_2$ .
- Zeigen Sie, dass  $P^2 = P$ .
- Zeigen Sie, dass  $V_1 = \text{Bild } P$  und  $V_2 = \text{Kern } P$ . (Insbesondere kann man  $V_1$  und  $V_2$  aus  $P$  bestimmen.)
- Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Endomorphismus  $P \in \mathcal{L}(V)$  mit  $P^2 = P$  Unterräume  $V_1$  und  $V_2$  gibt mit  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ,  $V_1 + V_2 = V$  und  $P(v) = v_1$ .
- Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ ,  $V_1$  ein Unterraum und  $V_2 = V_1^{\perp}$ . Zeigen Sie, dass  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ . In der Vorlesung wird gezeigt, dass  $V_1 + V_2 = V$ . Man bezeichnet in diesem Fall  $P$  als orthogonale Projektion.
- Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von e) weiter, dass  $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle \forall u, v \in V$ .
- Zeigen Sie umgekehrt, dass für jede Projektion  $P$  mit  $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle \forall u, v \in V$  gilt:  $V_2 \subseteq V_1^{\perp}$ . (Wegen  $\dim V_1^{\perp} = n - \dim V_1$  folgt daraus weiter, dass  $V_2 = V_1^{\perp}$ .)

*Hinweis:* Teile dieser Aufgabe sind verwandt mit Aufgabe 17 von Blatt 4.

**Aufgabe 41: Gram-Schmidt-Verfahren** (20 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem  $\mathbb{R}^2$  durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und das oben definierte Skalarprodukt durch.

**Aufgabe 42: Fibonacci-Zahlen** (20 Punkte)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  und die Rekursionsvorschrift  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

*Hinweis:* Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie  $A$ , um  $A^n$  zu berechnen.

**Abgabe:** Bis 16:00 Uhr am Donnerstag, 8.7.2021.