Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
5. Juli 2021

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 11

Aufgabe 43: Dualraum und duale Basis (30 Punkte)

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$. Wir definieren nun n lineare Abbildungen $\hat{a}_i : V \to \mathbb{K}$ durch $\hat{a}_i(a_j) = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass $\hat{\mathcal{A}} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$ eine Basis des Dualraums $\hat{V}$ bildet. Diese wird die duale Basis zu $\mathcal{A}$ genannt.

(b) Sei nun eine zweite Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ von V gegeben, die man durch die Transformation S aus der alten Basis $\mathcal{A}$ erhält, also $b_j = Sa_j$. Wie lautet die Abbildung, die $\hat{\mathcal{A}}$ in $\hat{\mathcal{B}}$ überführt?

(c) Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren. Berechnen Sie die duale Basis zu (x, y).

Aufgabe 44: Matrixgruppen (15 Punkte)

(a) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{SL}(3, \mathbb{C})$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SU}(3)$.

(b) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{O}(2)$ liegt, aber nicht in $\mathrm{SO}(2)$.

(c) Geben Sie eine Matrix an, die in $\mathrm{U}(3)$ liegt, aber weder in $\mathrm{O}(3)$ noch in $\mathrm{SU}(3)$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 45: Drehbewegungen (25 Punkte)

Betrachten Sie einen starren Körper, bei dem ein Punkt im Ursprung des Koordinatensystems festgehalten wird. Die Bahn eines Punkts in dem Körper mit Ortsvektor x_0 zur Zeit $t = 0$ wird durch $x(t) = D(t)x_0$ mit $D(t) \in \mathrm{SO}(3)$ beschrieben. Wir definieren nun die Zeitableitung $\dot{D}(t)$ der Matrix $D(t)$ komponentenweise. Dann folgt $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$ mit $A(t) = \dot{D}(t)D^{-1}(t)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A(t)$ antisymmetrisch ist, d.h. $A^T(t) = -A(t)$.

(b) Sei $\mathcal{A}$ der Vektorraum der antisymmetrischen 3×3-Matrizen. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{A}$ gibt, so dass $L(u)v = u \times v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(c) Folgern Sie daraus, dass es ein $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass $\dot{x}(t) = \omega(t) \times x(t)$.

Aufgabe 46: Diagonalisieren (30 Punkte)

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $S \in \mathrm{O}(3)$, die

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert, also

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Wieviele verschiedene solcher Matrizen S gibt es?
Schreiben Sie weiterhin A in folgender Form

$$A = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j P_j,$$

wobei r die Anzahl verschiedener Eigenwerte λ_j von A ist und P_j die Projektion auf den Eigenraum zu λ_j ist (d.h. bestimmen Sie die P_j). Diese Darstellung nennt man Spektraldarstellung und die Projektionen P_j Spektralprojektionen.

Vokabeln: Eigenwert = eigenvalue (selten: proper value), Eigenvektor = eigenvector (selten: proper vector), Eigenraum = eigenspace (selten: proper space), Vielfachheit = multiplicity, diagonalisierbar = diagonalizable, Spur = trace, Skalarprodukt = scalar product oder inner product (oder dot product), positiv definit = positive definite [definitt], Hermitesch = Hermitian, euklidischer Raum = Euclidean space [juklidiän], Orthonormalbasis = orthonormal basis, Betrag/Länge/Norm eines Vektors = magnitude/length/norm, Einheitsvektor = unit vector, normierter Raum = normed space, Orthonormierungsverfahren = orthonormalization procedure, Isometrie = isometry [aißometri], unitär = unitary, adjungierte Matrix = adjoint matrix, selbst-adjungiert = self-adjoint, Dualraum = dual space.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Donnerstag, 15.7.2021.