Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
26. April 2021

Lineare Algebra 1 Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Vektorraumaxiome (28 Punkte; Teamaufgabe)

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie unter Verwendung der Vektorraumaxiome:

a) $0 \cdot v = 0$

b) $\lambda \cdot 0 = 0$

c) $(-1) \cdot v = -v$

d) $\lambda \cdot v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0$ oder $v = 0$

Aufgabe 6: Durchschnitte von Unterräumen (18 Punkte; Teamaufgabe)

a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler (auch unendlich vieler) Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum ist.
b) Wann ist die Vereinigung zweier Unterräume wiederum ein Unterraum? (Mit Beweis.)

Aufgabe 7: Funktionenräume? (30 Punkte)

Die Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ aller Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein reeller Vektorraum. Bestimmen Sie mit Beweis, welche der folgenden Mengen Unterräume des $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind:

a) die Menge aller ungeraden Funktionen, d.h. $f(-x) = -f(x)$,

b) die trigonometrischen Polynome, dies sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die sich in der Form
$$f(x) = \tfrac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx))$$
mit $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ darstellen lassen,

c) die Menge der Funktionen mit $f(0) = 1$,

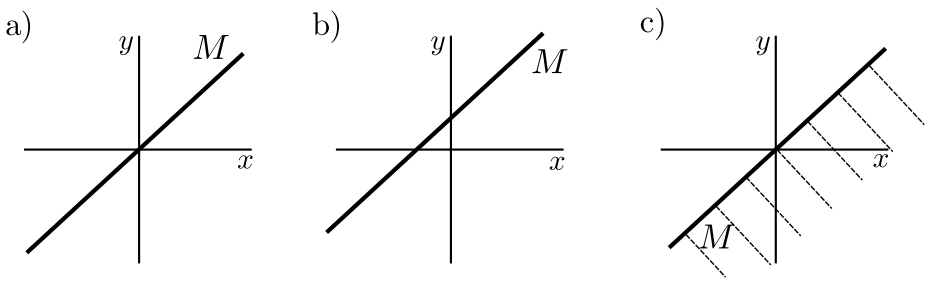
d) die Menge der Funktionen, so dass $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \geq 0$,

e) die Menge der Funktionen, für die $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + y) = f(x)f(y)$,

f) die Menge der linearen Funktionen, d.h. $\forall \alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$.

Aufgabe 8: Visuelle Repräsentation von Vektorräumen (24 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden visuellen Darstellungen von Mengen $M \subset \mathbb{R}^2$ Unterräume des $\mathbb{R}^2$ sind. Begründen Sie Ihre Antworten.



Abgabe: Sie laden Ihre Lösung bis 16:00 Uhr am Donnerstag den 06.05.2021 auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` hoch.