Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
10. Mai 2021

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 4

Aufgabe 14: Lineare Abbildungen auf $P_\mathbb{R}$ (16 Punkte; Teamaufgabe)

Sei $P_\mathbb{R}^{(r)}$ wieder der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq r$. Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to P_\mathbb{R}^{(2)}$, die gleichzeitig die folgenden 3 Bedingungen erfüllt:

$L(1,2,3) = x^2 - 1, \qquad L(0,2,1) = 3x + 4, \qquad L(-1,0,-2) = x^2 + x + 1?$

Aufgabe 15: Bild und Kern (30 Punkte; Teamaufgabe)

Bestimmen Sie für die folgenden linearen Abbildungen jeweils $\text{Kern}(L_j)$, $\text{Bild}(L_j)$, $\dim(\text{Kern}(L_j))$ und $\dim(\text{Bild}(L_j))$. (Eine Fallunterscheidung kann nötig sein.)

a) $L_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto a \times x$, d.h. das Kreuzprodukt mit einem festen Vektor $a \in \mathbb{R}^3$.
Zur Erinnerung: $(a_1, a_2, a_3) \times (x_1, x_2, x_3) := (a_2x_3 - a_3x_2, a_3x_1 - a_1x_3, a_1x_2 - a_2x_1)$.

b) $L_2 : P_\mathbb{R}^{(3)} \to \mathbb{R}$, $p \mapsto \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$.

c) $L_3 : V \oplus V \to V$, $(v, w) \mapsto v - w$, wobei $\dim(V) = n$ sei.

Aufgabe 16: Drehmatrizen im $\mathbb{R}^3$ (24 Punkte; Teamaufgabe)

Für $i = 1, 2, 3$ sei $X_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_i-Achse um $\pi/2$ entgegen dem Uhrzeigersinn (bei rechtshändiger Anordnung der Achsen) und X_i^{-1} die Drehung im Uhrzeigersinn. Bestimmen Sie die zugehörigen Matrizen bzgl. der kanonischen Basis für jedes X_i und X_i^{-1}. Bestimmen Sie durch geometrische Betrachtungen $X_1^{-1}X_2X_1$ und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Matrixmultiplikation ausführen.

Aufgabe 17: Projektionen (30 Punkte; Teamaufgabe)

Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist idempotent, d.h. $P \circ P = P$.

(ii) Die Einschränkung von P auf $U := \text{Bild}(P)$ ist die Identität, d.h. $P|_U = \text{id}_U$.

(iii) Es existieren Unterräume $U, W \subset V$, so dass $U + W = V$ und $P(u + w) = u$ für alle $u \in U$ und $w \in W$.

Ist eine dieser Eigenschaften (und damit alle) erfüllt, so heißt P eine Projektion.

Tipp: Beweisen Sie z.B. die Implikationen (i)$\Rightarrow$(ii), (ii)$\Rightarrow$(iii) und (iii)$\Rightarrow$(i).

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Donnerstag 20.05.2021 auf `urm.math.uni-tuebingen.de`.

Vokabeln: lineare Abbildung = linear mapping, Homomorphismus = homomorphism, Bild (einer linearen Abbildung) = image oder range, Kern = kernel oder null space, isomorph = isomorphic [aißomorfik], kanonisch = canonical, Ebene = plane, Gerade = (straight) line, Achse = axis, Drehung = rotation, Spiegelung = reflection, Projektion = projection, Vorzeichen = sign, Zeile = row, Spalte = column, Rang = rank, im Uhrzeigersinn = clockwise, entgegen dem Uhrzeigersinn = counterclockwise, cartesisches Koordinatensystem = Cartesian coordinate system, Ursprung (eines Koordinatensystems) = origin.