Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
21. Mai 2021

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 6

Aufgabe 22: Matrizen invertieren (25 Punkte)

Invertieren Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Jordan-Verfahren. Geben Sie explizit an, für welche Werte des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ dies möglich ist.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\lambda & -1 & \mathrm{i}\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{i} & \lambda \end{pmatrix}$

Aufgabe 23: Ein lineares Gleichungssystem (25 Punkte)

Benutzen Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ zu bestimmen mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24: Keplersche Fassregel (25 Punkte)

Johannes Kepler gab 1615 in seiner *Nova stereometria* eine Formel für den Inhalt von Weinfässern an, die auf folgender Näherungsmethode beruht: Zur näherungsweisen Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ betrachten wir die Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ und $x_2 = b$ und setzen $y_k = f(x_k)$ für $k = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom p und zeigen Sie

$$\int_a^b p(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Aufgabe 25: Methode der kleinsten Quadrate (25 Punkte)

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsgerade durch die folgenden Punkte im $\mathbb{R}^2$: $(0,2), (3,8), (4,9), (1,5)$.

Aufgabe 26: (freiwillig) Eschers Treppe (40 Bonuspunkte)

Zeichnen Sie Eschers unmögliche Treppe (Abb. 1) nach, wie in Abb. 2.

Vorbemerkung: Während Escher Zentralperspektive benutzt hat, benutzen wir die (einfachere) Parallelperspektive. Was ist das? Die Zentralperspektive ist die korrekte Art des Abbildens (wie beim Auge oder Foto): Wir benutzen ein Koordinatensystem im $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung am Ort des Beobachters und dem Bild in der Ebene $x_1 = 1$. Ein Objekt (oder ein Punkt eines Objekts) am Ort $u = (u_1, u_2, u_3)$ mit $u_1 > 0$ wird abgebildet auf denjenigen Punkt in der Bildebene, der vom Beobachter aus gesehen in derselben Richtung liegt wie das Objekt, also $g_z(u) = u_1^{-1} u = (1, u_2/u_1, u_3/u_1)$; die relevanten Koordinaten im Bild sind $f_z(u) = (u_2/u_1, u_3/u_1) \in \mathbb{R}^2$. Bei der

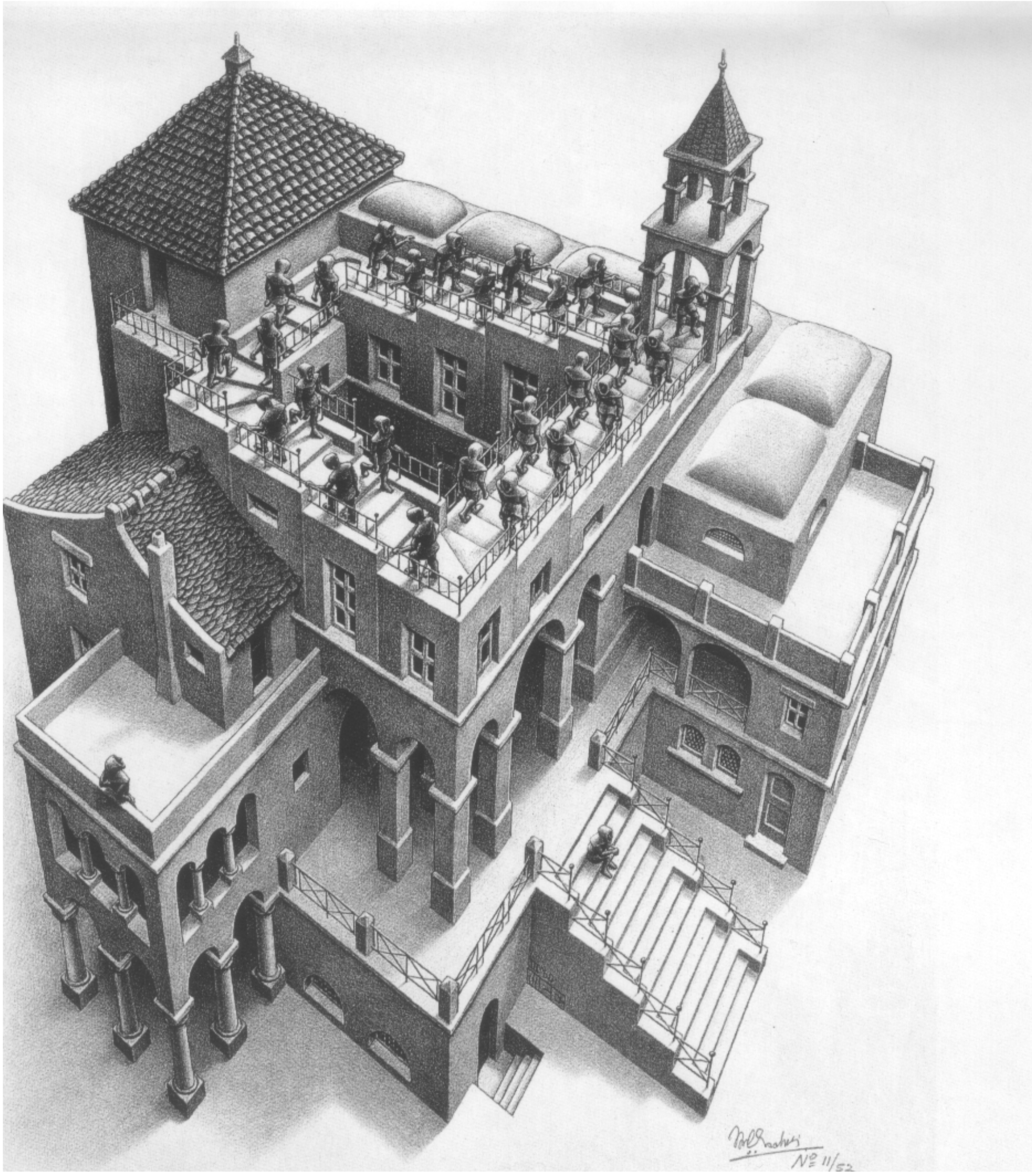

Abbildung 1: M. C. Escher (1898–1972), “Treppauf und treppab”, Lithografie (1960).

Parallelperspektive hingegen bildet man den Punkt u auf $g_p(u) = (1, u_2, u_3)$ ab; die relevanten Koordinaten sind $f_p(u) = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$. Die Parallelperspektive ist immer dann näherungsweise korrekt (bis auf eine zentrische Streckung), wenn sich die u_1-Werte der abgebildeten Objekte nicht stark unterscheiden. Während die Abbilder paralleler Geraden in der Zentralperspektive “zusammenlaufen”, sind sie in der Parallelperspektive parallel. Noch etwas: Ein *Polygonzug* ist eine Aneinanderreihung gerader Strecken, von denen jede am Endpunkt der vorigen beginnt (wie z.B. in Abb. 2).

Anleitung zur Aufgabe: Wir verfolgen nur die Außenkante der Stufen und fassen (wie das Geländer in Eschers Bild) je drei Stufen zu einem Element zusammen. Wir betrachten drei Einheitsvektoren $e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}^3$, von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen; diese Vektoren repräsentieren die drei Achsen des Gebäudes in Abb. 1. Wir setzen $v_x = f_p(e_x), v_y = f_p(e_y), v_z = f_p(e_z)$. Kennen wir von einem Punkt u das Abbild $f_p(u)$, so finden wir $f_p(u + \lambda e_x) = f_p(u) + \lambda v_x$ und entsprechend für e_y, e_z.

Der Trick an der unmöglichen Treppe besteht darin, dass ein Polygonzug im $\mathbb{R}^3$, der eine Treppe

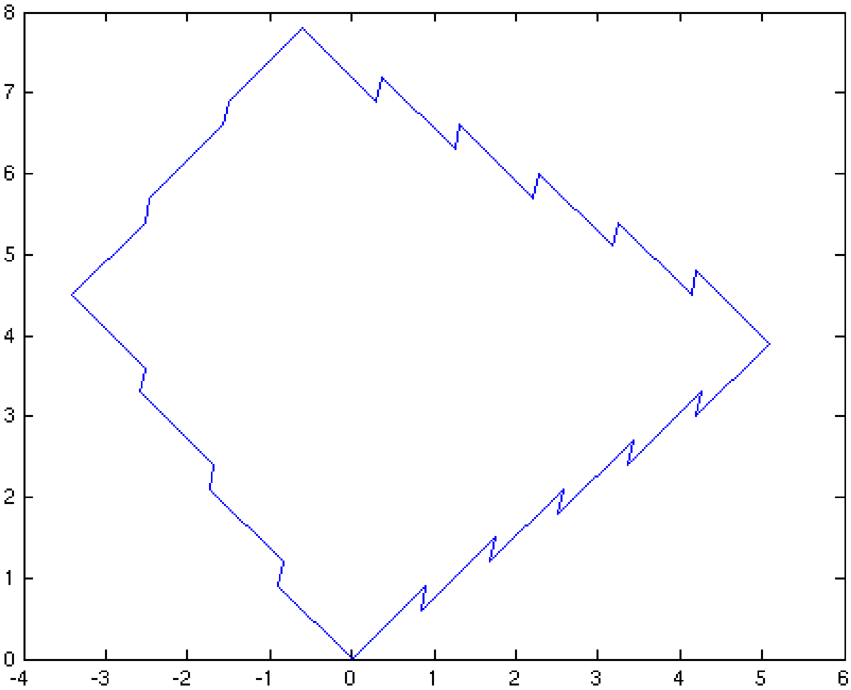

Abbildung 2: Außenkante der Treppe als Polygonzug.

entlang stets abwärts führt, unmöglich wieder am Ausgangspunkt ankommen kann, während sein Abbild sehr wohl am Abbild des Ausgangspunkts enden kann und daher in $\mathbb{R}^2$ einen geschlossenen Polygonzug bildet. Ist jede Stufe 10 cm hoch und 30 cm lang, dann ist jedes Stufenelement $\mu = 30$ cm hoch und $\lambda = 90$ cm lang. Der Weg im $\mathbb{R}^3$ entlang der Außenkante, an der dem Betrachter zugewandten Ecke beginnend, legt also zunächst die Strecke λ in x-Richtung zurück, dann $-\mu$ in z-Richtung, dann wieder λ in x-Richtung etc. (für die 6 Stufenelemente 6 mal λ in x-Richtung und 5 mal $-\mu$ in z-Richtung); dann λ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung etc. (6 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in x-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (3 Stufenelemente); dann $-\lambda$ in y-Richtung, $-\mu$ in z-Richtung (4 Stufenelemente). Damit das Abbild dieses Weges geschlossen ist, muss in $\mathbb{R}^2$ gelten

$$6\lambda v_x - 5\mu v_z + 6\lambda v_y - 5\mu v_z - 3\lambda v_x - 2\mu v_z - 4\lambda v_y - 3\mu v_z = 0.$$

Wählen Sie Vektoren $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^2$ (zwei ausgesucht, der dritte aus der Gleichung bestimmt), die Eschers Bild einigermaßen nahekommen, und schreiben Sie ein Computer-Programm (in einer selbstgewählten Sprache, oder mit Hilfe einer Mathe-Software wie Matlab (kostenlos über das ZDV zu erhalten) oder Maple), das das Abbild des Weges in $\mathbb{R}^2$ plottet. Bitte geben Sie neben Ihrem Plot einen Ausdruck Ihres Quellcodes ab.

Vokabeln: Formel = formula (Plural formulae oder formulas), Annahme = assumption, Voraussetzung (eines Satzes) = hypothesis [haipo(th)esis] (Plural hypotheses [haipo(th)esies]), elementare Zeilenumformung = elementary row operation, ähnliche Matrizen = similar matrices, Zeilenstufenform = row echelon [eschelon] form, nach x auflösen = solve for x, lösbar = solvable, eindeutig lösbar = uniquely solvable, universell lösbar = universally solvable, obere Dreiecksmatrix = upper triangular matrix, affiner Unterraum = affine [effain] subspace, Gaußsches Eliminationsverfahren = Gaussian elimination algorithm, Methode der kleinsten Quadrate = method of least squares.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Donnerstag 10.06.2021.