

## LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 7

### Aufgabe 27: Determinanten (20 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

a) Die der Drehmatrix  $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ ,

b) Die von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 28: Signum einer Permutation (25 Punkte)

Eine bijektive Abbildung  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  nennt man eine Permutation; die Menge  $S_n$  aller Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, genannt die symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe.

a) Wir definieren für jedes  $\pi \in S_n$  einen Endomorphismus  $L_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch

$$L_\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann  $\text{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$  ("Signum von  $\pi$ ") annehmen?

b) Welchen Wert hat  $\text{sgn}(\sigma_{ij})$ , wobei

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

die Transposition von  $i$  und  $j$  mit  $i \neq j$  ist?

c) Seien  $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ . Zeigen Sie, dass  $\text{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \text{sgn}(\pi_2) \text{sgn}(\pi_1)$ .

### Aufgabe 29: Determinanten und Zeilenstufenform (30 Punkte)

- (a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach  $n$ , dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

- (b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?

Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf diagonale Zeilenstufenform bringen:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(Sie brauchen in der Abgabe nicht alle Umformungsschritte hinzuschreiben; es genügt, die erreichte Zeilenstufenform anzugeben und daraus  $|B|$  zu bestimmen.)

### Aufgabe 30: Nochmal Permutationen (25 Punkte)

Folgendes Problem trat letztes Jahr in meiner Forschung über Quantenmechanik auf. Ein Unterraum  $U$  von  $\mathbb{K}^n$  heiße *permutations-invariant*, wenn mit jedem Vektor  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  auch  $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in U$  ist fur jede Permutation  $\pi \in S_n$ . Zeigen Sie: Ist  $U$  ein permutations-invarianter Unterraum des  $\mathbb{K}^n$ , der den Vektor  $c := (1, 1, 1, \dots, 1)$  enthalt, dann ist entweder  $U = \text{span}(c) = \mathbb{K}c$  oder  $U = \mathbb{K}^n$ .

**Vokabeln:** Mittelwert = mean (value),  $n$  Fakultät =  $n$  factorial, Determinante = determinant, nach der ersten Spalte entwickeln = to expand along the first column, alternierende Multilinearform = alternating multilinear form, Signum einer Permutation = sign of a permutation, Lösung = solution, rechter Winkel = right angle, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Rechenaufwand = computational cost, Näherung = approximation, Rauminhalt = volume, Flächeninhalt = area, Zylinder = cylinder, Kegel = cone, Kegelschnitt (d.h., Ellipse, Parabel oder Hyperbel) = conic section, Ellipse = ellipse, Parabel = parabola, Hyperbel = hyperbola.

**Abgabe:** Bis 16:00 Uhr am Donnerstag 17.06.2021.