Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2021
21. Juni 2021

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 9

Aufgabe 34: Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen (25 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume in $\mathbb{R}^3$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar? Führen Sie die Diagonalisierung für die erlaubten Parameter durch, d.h. bestimmen Sie S (invertierbar) und D (diagonal) so, dass $A = SDS^{-1}$.

Aufgabe 35: Spur und Determinante als Funktion der Eigenwerte (10 Punkte)

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $L \in \mathcal{L}(V)$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und geometrischen Vielfachheiten $n_1, \ldots, n_r$. Drücken Sie $\mathrm{Spur}(L)$ und $\det(L)$ durch die Eigenwerte von L aus.

Aufgabe 36: Verschiedenes zu Eigenwerten (40 Punkte)

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ und λ ein Eigenwert mit zugehörigem Eigenraum $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

(a) λ ist ein Eigenwert von A^T mit Vielfachheiten $a_{A^T}(\lambda) = a_A(\lambda)$ und $g_{A^T}(\lambda) = g_A(\lambda)$.

(b) Sei A regulär, dann ist $\lambda \neq 0$ und λ^{-1} Eigenwert zu A^{-1}. Geben Sie den zugehörigen Eigenraum an.

(c) $\bar{\lambda}$ ist Eigenwert von $\bar{A}$. Geben Sie auch hier den zugehörigen Eigenraum an.

(d) Sei A nilpotent, d.h. es gibt ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $A^m = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt $\lambda = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 37: L^2-Skalarprodukt (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem Funktionenraum $C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ der stetigen komplex-wertigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ durch

$$\langle u,v\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \overline{u(x)}\, v(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt definiert wird. (Das Integral einer komplex-wertigen Funktion f kann definiert werden durch $\int f(x)\,dx = \int \operatorname{Re} f(x)\,dx + \mathrm{i}\int \operatorname{Im} f(x)\,dx$.) Zeigen Sie weiter, dass die Funktionen

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

ein Orthonormalsystem bilden. Wir definieren hier die komplexe e-Funktion durch die Euler-Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$.
Hinweis: Benutzen Sie ohne Beweis, dass für stetige Funktionen $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ mit $|f(x_0)| > \varepsilon > 0$ für ein $x_0 \in [-\pi,\pi]$ eine offene Umgebung von x_0 existiert, so dass auf dieser Umgebung gilt $|f(x)| \geq \varepsilon$. Weiter dürfen Sie ohne Beweis benutzen, dass $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x+\mathrm{i}y}$ und dass die Abbildung $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z}$ eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 38: Orientierung von Basen (freiwillig; 20 Zusatzpunkte)
Betrachten Sie einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension n und die Menge $B(V)$ aller Basen von V. Zwei Elemente $\mathcal{A},\mathcal{B} \in B(V)$ mit $\mathcal{A} = (v_1,\ldots,v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1,\ldots,w_n)$ heißen gleichorientiert, $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn der durch $Lv_i = w_i$ festgelegte Endomorphismus $L : V \to V$ positive Determinante hat. (a) Zeigen Sie, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $B(V)$ festlegt. (b) Wie viele Äquivalenzklassen gibt es?

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Donnerstag, 1.7.2021.