A1

a.) falsch

Sei: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$\lightning$

b.) falsch $M \in M(n,K)$

M singulär $\Leftrightarrow \det M = 0$

M regulär $\Leftrightarrow \det M \neq 0$

$$\det(AB) = \det(A)\underbrace{\det(B)}_{=0} = 0$$

c.) falsch Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ regulär

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ singulär

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

d.) falsch (vgl. Scherung)

Einziger EW: $\lambda_1 = 3$ $g(3) = 1$

$\Rightarrow \nexists$ Basis aus EV

$\Rightarrow$ Nicht diagonalisierbar

A2

Sei: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & -c & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -c+ba & -b & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ II - aI \\ III - cI \\ \\ \\ III - bII \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -c+ba & -b & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -c+ba & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A4

a.) nein

b.) ja

c.) nein

d.) nein

e.) nein

f.) ja

A5

$$R = \begin{pmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad R^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ u & b & 0 \\ w & v & c \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(R^T R) = \det(R^T)\det(R) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dreiecks-} \\ \text{matrix}}}{=} (abc)(abc) = (abc)^2$$

A6 Lsg:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$Rg(A) = 3$ da Spaltenrang = Zeilenrang

A7

a) Linear abhängig

$$\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Sei $\alpha = 1$ $\beta = -1$ $\gamma = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Es existiert eine nicht triviale Lösung

$\Rightarrow$ Linear Abhängig

b) Es gibt keine Lineare Abb, die das geforderte erfüllt

$$L(a+b) \overset{!}{=} L(a) + L(b)$$

$$L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = L\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{L \text{ linear}}{=} L\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \lightning$$

A8 Dimensionsformel für UR

$\dim(W \cap U) + \dim(W+U) = \dim(W) + \dim(U)$

$\dim(W \cap U) = \dim(W) + \underbrace{\dim(U)}_{n-1} - \underbrace{\dim(W+U)}_{\geq n}$

$\geq n$, da beides UR von V mit $\dim(V) = n$

$\dim(W \cap U) \geq \dim(W) + n - 1 + n$

$\dim(W \cap U) \geq \dim(W) - 1$ $\square$

A9 $A = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

A10

a) A positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EW > 0

$$P_L(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 17\lambda + 10$$

liefert $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ $\lambda_3 = 5$

$\Rightarrow$ alle EW positiv

$\Rightarrow$ A positiv definit

b) $$u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\langle e_1, Ae_1\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{e_2 - P_1 e_2}{\|e_2 - P_1 e_2\|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, Ae_2\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, Ae_2\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\rangle}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{e_3 - P_2 e_3}{\|e_2 - P_2 e_3\|} = \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, Ae_3\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \langle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, Ae_3\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}\right\|}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{\langle \begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}\rangle}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{5}}\begin{pmatrix}0\\2/3\\1\end{pmatrix}$$

A11

a) A ist nicht selbstadjungiert: $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$

b) A ist keine Projektion $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq A$

c) A ist invertierbar, da $\det(A) = 1$

d) $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = A^* \Rightarrow A$ unitär

A12

$\hat{v}_1 (v_i) = \delta_{1i}$

$$\left.\begin{aligned} 1 v_{11} + 2 v_{12} &= 1 \\ 4 v_{11} + 2 v_{12} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{LGS liefert } \hat{v}_1 = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right)$$

$\hat{v}_2 (v_i) = \delta_{2i}$

$$\left.\begin{aligned} 1 v_{21} + 2 v_{22} &= 0 \\ 4 v_{21} + 2 v_{22} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{LGS liefert } \hat{v}_2 = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{6}\right)$$

$\boxed{\text{A13}}$

$(A^T A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Py = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Ax = y$ besitzt keine Lösung, da Py die Projektion auf das Bild(A) ist

$\Rightarrow y$ liegt nicht im Bild(A), da $Py \neq 0$

b) $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ LGS liefert $x = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$\|Ay - y\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$

$\boxed{A14}$

a.) $A = S D S^{-1}$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $S^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $(*)$

$A^T = 5(S D S^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T$

$= S^{-1} D S$

$\overset{S = 5 \cdot S^{-1} \, (*)}{=} S \cdot D \, S^{-1} = A$ ✓

b.) $\det(A) = \det(S^{-1} D S)$

$= \det(S^{-1}) \det(D) \det(S)$

$\overset{\det(S) = \frac{1}{\det(S^{-1})}}{=} \det(D) = -1 \cdot 0 = 0$

$Spur(A) = Spur(S^{-1} D S)$

$\underset{\text{zyklischer permutation}}{\overset{\text{invariant unter}}{=}} Spur(S^{-1} S D) = Spur(D) = -1 + 0 = -1$

c.) $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

A15 bekannt: $x = S e^{Dt} S^{-1} a$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E)$ liefert EW: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

Bestimme EV:

$Av = 1v \Rightarrow v = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Av = 2v \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Jordan liefert: $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{1\cdot t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{1\cdot t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$\boxed{A16}$ $\quad Q = E - 2uu^T$

symmetrisch:

$$Q^T = (E - 2uu^T)^T$$

Transponieren linear

$$= E - 2(uu^T)^T$$

$(XY)^T = Y^T X^T$

$$= E - 2\, u^{T^T} u^T \quad = E - 2uu^T = Q$$

<u>orthogonal</u>

$$QQ^T = (E - 2uu^T)(E - 2uu^T)^T$$

$$= E^2 - 2uu^T E - 2Euu^T + 4(uu^T)^2$$

$$= E - 4uu^T + 4(uu^T)^2$$

<u>Beh:</u> $(uu^T)^2 = uu^T \qquad (I)$

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

$$u u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} (u_1, u_2 \cdots u_n) = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ u_1 u_n & & & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$(uu^T)^2 = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ u_1 u_n & & & u_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 & \cdots & u_1 u_n \\ u_1 u_2 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ u_1 u_n & & & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^2(u_1^2+u_2^2 \dots + u_n^2) & \cdots & u_1u_n(u_1^2+u_2^2 \dots + u_n^2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1u_n(u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2) & \cdots & u_n^2(u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2)}_{\|u\|^2} \begin{pmatrix} u_1^2 & \cdots & u_1u_n \\ u_1u_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ u_1u_n & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \begin{pmatrix} u_1^2 & \cdots & u_1u_n \\ u_1u_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \\ u_1u_n & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

$$QQ^T = E - 4uu^T + 4(uu^T)^2$$

$$\overset{(I)}{=} E - 4uu^T + 4uu^T$$

$$= E$$

$\Rightarrow Q$ orthogonal