Aufspann

Beh 1: $\mathrm{span}(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}(M)$

Beh 2: $M \subset \mathrm{span}(M)$

Bew: Betrachte Lin.komb. mit 1 Koeff. $= 1$, sonst $= 0$

$$\sum_j \alpha_j v_j = v_i$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kronecker-Symb. □

Beh 3: Wenn $M_1 \subset M_2$, dann $\mathrm{span}(M_1) \subset \mathrm{span}(M_2)$.

Bew Jede Lin.komb. von M_1 ist auch Lin.komb. von M_2. □

Beh 4: $\mathrm{span}(M)$ ist UR.

Bew: Vorl. $M \subset V$

Beh 5: $\mathrm{span}(M) = \bigcap_{\substack{U \text{ UR} \\ M \subset U}} U$

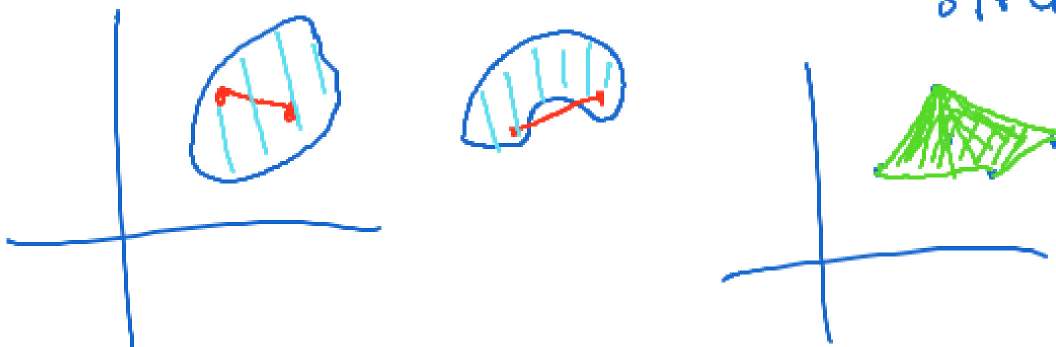
Bew „$\subset$": U UR, $M \subset U$, $\mathrm{span}(M) \subset U$.

„$\supset$": $\mathrm{span}(M)$ ist selbst UR □

Hüllenoperation: Abschluss, Konvexe Hülle

Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt <u>konvex</u> $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in M$

Strecke$(x,y) \subset M$



$\text{span}(v_1 \dots v_n) = \text{span}(u_1 \dots u_m)$?

- syst. Methode: später (Zeilenstufenform)
- Wenn sich jedes u_j als $\sum \alpha_i v_i$ schr. lässt, dann $\text{span}(u_1 \dots u_m) \subset \text{span}(v_1 \dots v_n)$.

Komposition

$f: X \to Y,\ g: Y \to Z$

$h = g \circ f \iff h(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$

$h: X \to Z$.

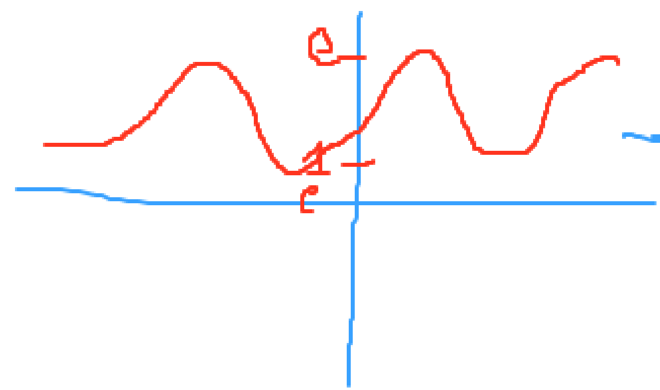
$\circ$ ist asso., aber nicht komm.

Bsp $e^{\sin x} \neq \sin(e^x)$

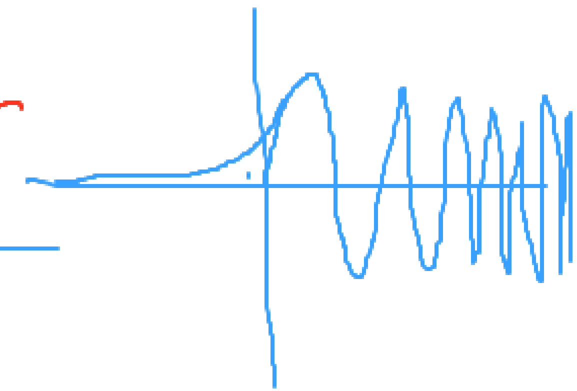
$f(x) = \sin x$

$g(y) = e^y$

$e^{\sin x}$

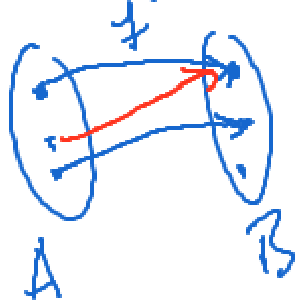


$\sin(e^x)$



Inj. und surj.

Def: $f: A \to B$ inj $\iff \forall a_1, a_2 \in A$: wenn $f(a_1) = f(a_2)$, dann $a_1 = a_2$.



$f: A \to B$ surj $\iff \forall b \in B\ \exists a \in A: f(a) = b$.

$f: A \to B$ bij $\iff$ inj. und surj.

Fragen: a) Wie viele Abb. $f: \{1..m\} \to \{1...n\}$ gibt es?

b) Wie viele bij.?

c) Wie viele inj.?

d) Wie viele surj.?

Antw: a) n^m, b) Falls $m \neq n$: 0.

b) Falls $m = n$: $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$

c) Falls $n < m$: 0

Falls $n \geq m$: $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$

d) Falls $n > m$: 0

Falls $n = m$: $n!$ Falls $n < m$: schwierig

Bem $f: A \to B$

$f: A \to B'$, $f(a) \in B'$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Linksinv.

Bek a) f inj $\iff \exists g: B \to A: g \circ f = id_A$

b) f surj $\iff \exists h: B \to A: f \circ h = id_B$

Rechtsinv.

c) f bij $\Rightarrow \exists_1$ Linksinv g, $\exists_1$ Rechtsinv. h, $h = g$

Bew a) $\Rightarrow$: Für $b \in f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ wähle $a \in A$ mit $f(a) = b$, setze $g(b) = a$. Für $b \in B \setminus f(A)$ setze $g(b)$ bel.

Dann $g(f(a)) = a$.

$\Leftarrow$: Wenn $f(a_1) = f(a_2)$ dann $a_1 = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = a_2$

c) f bij $\overset{a),\,b)}{\Rightarrow} \exists g, h$

$id_A = g \circ f$

$\cancel{h \circ id_A = h \circ (g \circ f)}$

$h = id_A \circ h = (g \circ f) \circ h$

$= g \circ (f \circ h) = g \circ id_B = g$ □

Logik & Mengenlehre

Bsp $A \cup B = B \cup A$

$\{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\}$

Muss man Logik-Gesetze beweisen?

I. allg. nein.

Ausnahme 1: unübersichtl.

$[(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)] \Rightarrow (Q \vee R)$

- El. Schlüsse: Modus ponens $\dfrac{\begin{matrix} P \\ P \Rightarrow Q \end{matrix}}{Q}$ Modus tollens $\dfrac{\begin{matrix} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \end{matrix}}{\neg P}$

- Wahrheitstafeln

Wahrheitstafel

$P \wedge Q$

$Q \backslash P$	w	f
w	w	f
f	f	f

$P \vee Q$

$Q \backslash P$	w	f
w	w	w
f	w	f

P	w	f
$\neg P$	f	w

, $P \Rightarrow Q$, d.h. $\neg P \vee Q$

$Q \backslash P$	w	f
w	w	~~f~~ w
f	~~w~~ f	w

$P \Leftrightarrow Q$

	w	f
w	w	f
f	f	w

Mo schein die Sonne $\Leftrightarrow$ 5 ist prim

$\forall x \in M: \; P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

Bsp $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Praktische Meth.: Venn-Diagramm

<u>Annahme</u> 2: Logik-Axiome wie Principia Mathematica (Russell & Whitehead 1913)

Mengenlehre-Axiome (Zermelo & Fränkel 1907 - 1930)

syntaktisches Schließen

M nichtl. Menge von nichtl. Mengen

Auswahlfkt $M \ni m \overset{f}{\longmapsto} x \in m$.