Matrixdarst.

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L) = M = (M_{ij})_{ij}$$

$L : V \to W$

$\mathcal{A} = \{a_1 .. a_n\}$

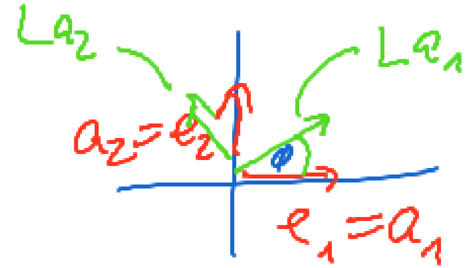
$\mathcal{B} = \{b_1 \dots b_m\}$

$$L a_i = \sum_{j=1}^{m} M_{ji} b_j$$

$$L a_j = \sum_{i=1}^{m} M_{ij} b_i$$

Drehung

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$



$$M = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Inj. und surj.

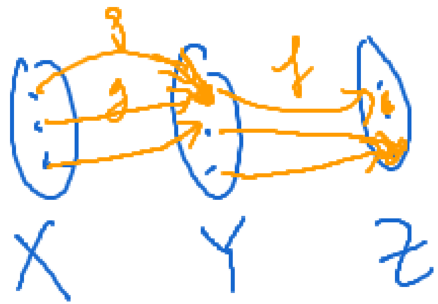
sei $f : Y \to Z$, $g : X \to Y$

Erinnerung

f, g inj $\Rightarrow f \circ g$ inj

f, g surj $\Rightarrow f \circ g$ surj.

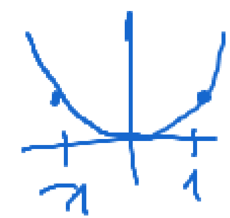
Beh Wenn $f \circ g$ inj, dann g inj, aber f nicht notw.



Bew Wenn $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Bsp: $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{x}$

$f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit $f(y) = y^2$



$f \circ g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $x \mapsto x$. $\square$

Beh Wenn $f \circ g$ surj, dann f surj, aber g nicht notw.

Bew $\forall z \in Z \ \exists x \in X : f(g(x)) = z$, also $\exists y \in Y$, nämlich $y = g(x)$ mit $f(y) = z$. Bsp wie oben. $\square$

Lin. unabh.

Def: $v_1 \dots v_n$ lin. unabh. $:\Leftrightarrow$

$\forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{K}$: wenn $\sum_i \alpha_i v_i = 0$, dann

$\forall j: \alpha_j = 0$.

$$\sum_i \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\neg \left(\forall (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : P \Rightarrow Q \right)$$

$(\neg P) \vee Q$

$$\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \neg (P \Rightarrow Q)$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists (\alpha_1 \dots \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : \quad P \wedge \neg (\forall j . \alpha_j = 0)$$

$\sum \alpha_i v_i = 0 \wedge \exists j : \alpha_j \neq 0$.

Def unendl. Menge lin. unabh. $:\Leftrightarrow$

jede endl. Teilmenge ist lin. unabh.

Problem $v_1 \dots v_n$ lin. unabh.?

- systematische Methode: später (Zeilenstufenform)
- gib ein v_i als Lin.komb der anderen an $\Rightarrow$ lin. abh.
- Zeige: Wenn $\sum \alpha_i v_i = 0$, dann $\alpha_j = 0 \Rightarrow$ lin. un.

Basis

Def Basis = lin. unabh. Erzeugendensyst.

Def $M \subset V$ Erz. syst. $:\Longleftrightarrow$

$V = \mathrm{span}(M) \Longleftrightarrow$

$\forall v \in V \; \exists n \in \mathbb{N} \; \exists v_1 \ldots v_n \in M.$

$\exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \in K : v = \sum \alpha_i v_i.$

Satz $v_1 \ldots v_n$ Erz. syst. $\Longleftrightarrow$

$\forall v \in V \; \exists \alpha_1 \ldots \alpha_n \in K : v = \sum \alpha_i v_i.$

Satz $v_1 \ldots v_n$ Basis von $V \Longleftrightarrow$

$\forall v \in V \; \exists_1 (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in K^n :$

$v = \sum \alpha_i v_i.$

Eine Basis ist zugleich ein minimales Erz-syst.
Und zugleich eine maximale linear unabh. Menge.

$v_1 \ldots v_n$

Matrix

Aufgabe Berechne

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

$A \in M(m \times n, K)$ habe Spalten $a_1 \dots a_n \in K^m$

$A : K^n \to K^m$

$x \mapsto Ax$

Beh 1 $\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{span}(a_1 \dots a_n)$

Bew $A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) =$

$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j$ $\square$

Beh 2 $a_1 \dots a_n$ lin. unabh.

$\Longleftrightarrow \operatorname{Kern}(A) = \{0\}$.

Bew $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \operatorname{Kern}(A)$

$\Longleftrightarrow \sum x_j a_j = 0$. $\square$

Dimensionsformeln

Nr. 1: $\dim(U \cap V) + \dim(U+V) = \dim U + \dim V$

(für U, V URe von W, $\dim U < \infty$, $\dim V < \infty$)

Nr. 2:

$\dim \mathrm{Kern}\, L + \dim \mathrm{Bild}\, L = \dim V$

(für $L: V \to W$ linear und $\dim V < \infty$).

Aufgabe: 2 URe U, V des $\mathbb{R}^{10}$, $\dim U = 5$, $\dim V = 7$.

Welche dim hat $U \cap V$ höchstens? Mindestens?

Antw: $\max = 5$.

denn $U \cap V \subset U$.

$\Rightarrow \dim(U \cap V) \leq \dim U = 5$.

Wenn $U \subset V$, dann $U \cap V = U$

$\dim U \cap V = 5$

$\min = 2$

$$\underbrace{\dim(U \cap V)}_{\geq 2} + \underbrace{\dim(U+V)}_{\leq 10} = 12$$

Vergleich

$X, Y \subset \{1, \dots, 10\}$, $\#X = 5$, $\#Y = 7$

$\#(X \cap Y)$ höchstens? Mind.?

Antw max 5, min 2.

$$\#(X \cap Y) + \#(X \cup Y) = \#X + \#Y.$$

Tieferer Zusammenhang:

$B_\cap$ Basis $U \cap V$

Basiserg.satz: $B_U \supset B_\cap$, $B_V \supset B_\cap$

$\Rightarrow$ $B_U \cup B_V$ ist Basis von $U+V$.
(siehe Bew der Dim.-formel).

~~X~~ Basis.erg.satz:

$B_{10} \supset B_U \cup B_V$

$X := B_U$, $Y := B_V$

$$\#(X \cap Y) = \#B_\cap = \dim U \cap V.$$

$$\begin{array}{c} a\,b\,c \\ \parallel \\ (a\,b)c = a(bc) \end{array}$$

$$(AB)C = A(BC)$$
$$\neq (BC)A$$

Schreibe ABC

---

reguläre Matrix

$A \in M(n \times n, K)$

<u>Def</u> A regulär $:\Longleftrightarrow$

$\exists B \in M(n \times n, K):$

$BA = E = AB.$

<u>Satz</u> A regulär $\Longleftrightarrow$

$A: K^n \to K^n$ bij $\Longleftrightarrow$

$\mathrm{Rang}(A) = n \Longleftrightarrow$

$\mathrm{Kern}(A) = \{0\}.$

<u>Satz</u> Wenn A, B regulär, dann AB regulär, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$

<u>Bew</u> $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}(AB))$

$= B^{-1}((A^{-1}A)B) = B^{-1}(EB) = E$

$$\overbrace{(B^{-1}A^{-1})}(AB) = B^{-1}(A^{-1}(AB))$$
$$= B^{-1}((A^{-1}A)B)$$
$$= B^{-1}(EB) = B^{-1}B = E$$
$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A((BB^{-1})A^{-1})$$
$$= A(EA^{-1}) = AA^{-1} = E. \quad \square$$

$U+V = \{u+v \mid u \in U, v \in V\}$

$U = \mathrm{span}(e_1 \dots e_5)$

$V = \mathrm{span}(\cancel{e_4 \dots e_{10}})$ $(e_2 \dots e_8)$

$U+V = \mathrm{span}(e_1 \dots e_8)$

$\underline{U} \oplus V$