Matrixdarstellung

$L : V \to W$
$\quad \mathcal{A} \quad\quad \mathcal{B}$

$M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(L)$

Aufgabe:

$V = P^{(4)}_{\mathbb{R}}$

$L : V \to V$

$Lp = \frac{dp}{dx}$

Basis $\mathcal{B} = \{x^0, x^1, \dots, x^4\}$

Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L) = ?$

$M :=$

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L\, x^2$
$= 0x^0 + 2x^1 + 0x^2 + \dots$

Bem $\operatorname{Rang}(M) = ?\ 4$

$\operatorname{Bild}(\cancel{M}) = ?\ P^{(3)}_{\mathbb{R}} = \operatorname{span}(x^0, \dots, x^3)$

$\operatorname{Bild}(M) \longrightarrow \operatorname{span}(e_1 \dots e_4)$

$\operatorname{Rang}(AB)$, $\operatorname{Rang}(A)\,B$, $(\operatorname{Rang} A)\,B$.

$\operatorname{Kern}(M)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 2 & & \\ & & 0 & 3 & \\ & & & 0 & 4 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 2x_3 &= 0 \\ 3x_4 &= 0 \\ 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\cancel{0 \quad 0\, x_5 = 0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Kern} M = \left\{ (x_1, 0, 0, 0, 0)\ \cancel{(0,0,0,0,x_5)} \;\middle|\; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}(e_1)$$

$$\operatorname{Kern} L = \operatorname{span}(x^0)$$

Symmetr. Matrizen

Aufgabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Fakt $\text{Rang}(A^T) = \text{Zeilenrang}(A)$
$= \text{Spaltenrang}(A) = \text{Rang}(A)$.

Def A symm. $:\Longleftrightarrow A = A^T$
A anti-symm. $:\Longleftrightarrow A = -A^T$

Bsp $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist symm., $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ ist anti-symm.

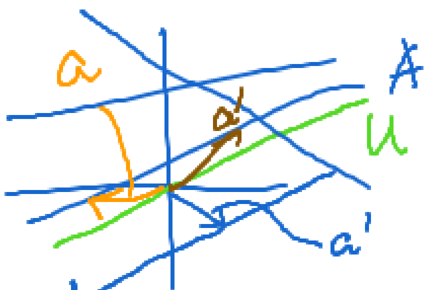
Bsp $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist weder symm. noch anti-symm.

Bsp Polynome vom Grad 2.

- in 2 Var: $p(x,y) = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$.
- Anteil homogen vom Grad 2
  $dx^2 + gxy + hyx + fy^2$
  $g + h = e$, verbreitet: $g = \frac{e}{2} = h$
- in n Var: $p(x_1 \dots x_n) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$, $(c_{ij}) = C$
  $= (x_1 \dots x_n)\, C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Affiner Unterraum

Def Ein aUR A eines VRs V ist eine Menge der Form $a+U$, wobei $a \in V$ und U UR von V ist.



Fakt: Jeder UR ist aUR, aber nicht umgek.

Bsp Die aURe des $\mathbb{R}^2$ sind:

- alle Geraden
- jede 1-el. Menge
- $\mathbb{R}^2$

Bem $a+U = a'+U' \iff U = U'$ und $a'-a \in U$

Bew $\Rightarrow$: $a' = a+u$, $u \in U$, also

$U' = (a'+U') - a' = (a+U) - a' = -u+U = U$.

$\Leftarrow$: $a'-a = u \in U$, dann

$a'+U' = a + \underbrace{u+U}_{U} = a+U$. $\square$

Def $\dim A := \dim U$.

A, A' aURe mit $\dim A = \dim A'$.

Def parallel: $A \parallel A' :\iff U = U'$.

$\iff A' = a''+A$, $a'' = a'-a$

Def affin-lineare Fkt $f(x) = a + Lx$, L linear.

Lösungsraum

Bsp $A \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^5$

$\{x \mid Ax = b\} =: \mathcal{L}_b$, $\operatorname{Rang}(A) = 3$.

Was kann man über $\mathcal{L}_b$ sagen?

Falls $b \notin \operatorname{Bild} A \Rightarrow \mathcal{L}_b = \emptyset$

Falls $b \in \operatorname{Bild} A \Rightarrow \mathcal{L}_b$ ist aUR

$\dim \mathcal{L}_b = 2$

Allg: Wenn $b \in \operatorname{Bild} A$,

("$A = a + U$")

dann $\mathcal{L}_b = x_{spez} + \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{Kern} A}}{\mathcal{L}_0}$

$\dim \mathcal{L}_b = \dim \mathcal{L}_0 = \dim \operatorname{Kern} A$

$\dim \operatorname{Kern} A + \underbrace{\dim \operatorname{Bild} A}_{\operatorname{Rang} A = 3} = 5$

$\Rightarrow \dim \mathcal{L}_b = 2.$

Wahr oder falsch?

Sei $A \in M(m \times n, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

a) Wenn das LGS $Ax=b$ mehr Unbek. als Gl.en hat $(m<n)$, dann gibt es immer eine Lsg.

Falsch.

b) Wenn $Ax=0$ mehr Unbek. als Gl.en hat, dann gibt es immer eine Lsg.

Wahr.

c) Wenn $Ax=0$ mehr Unbek. als Gl.en hat, dann gibt es immer eine Lsg $\neq 0$.

Wahr. $\operatorname{Kern}(A) \neq \{0\}$

$\Leftrightarrow \dim \operatorname{Kern} A > 0$.

$\underbrace{\dim \operatorname{Bild} A}_{\leq m < n} + \underbrace{\dim \operatorname{Kern} A}_{\Rightarrow > 0} = n$

d) Wenn $Ax=b$ eine eind. Lsg. hat, dann $m=n$.

Falsch.

e) Wenn $m=n$,

dann hat $Ax=b$ ein

eind. Lsg.

Falsch.

$\dim \operatorname{Bild} A + \dim \operatorname{Kern} A = n$