Basiswechsel

Wie finde ich $S = (s_{ij})$?

S hat die def. Eigenschaft

$$b_j = \sum_i s_{ij} a_i$$

(Infolgedessen gilt

$$\sum_j \beta_j b_j = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j s_{ij} a_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$$

mit $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j s_{ij} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \beta_j$

d.h. $\boxed{\underline{\alpha} = S \underline{\beta}}$ Konversionsformel

$$\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

führt auf ein LGS

Bsp:

Bsp: $a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$b_1 = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$

Erste Hälfte:

$b_1 = s_{11}\, a_1 + s_{21}\, a_2$ d.h.

$$5 = s_{11} + 3 s_{21}$$
$$6 = 2 s_{11} + 4 s_{21}$$

$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & 4\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

Lösen durch Gauß-Verf:

$$s_{11} + 3 s_{21} = 5$$
$$0 \; \cancel{a} - 2 s_{21} = -4$$

Rücksubst: $s_{21} = 2, \; s_{11} = -1.$

2te Hälfte: $b_2 = s_{12} a_1 + s_{22} a_2$

$$\left.\begin{array}{l} 7 = \cancel{s_{11}}\, s_{12} + 3 s_{22} \\ 8 = 2 s_{12} + 4 s_{22} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} s_{12} + 3 s_{22} = 7 \\ -2 s_{22} = -6 \end{array}\right.$$

$(A|b) = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$

$s_{22} = 3$

$s_{12} = -2$

Ergebnis:

$$S = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = s_{11}\, a_1 + s_{21}\, a_2$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(5 \;\; 6) = (-1)\,(1 \;\; 2) + 2 \;\; (3 \;\; 4)$$

$$\underline{\alpha} = S \underline{\beta} \;, \qquad \underline{\alpha}^T = \underline{\beta}^T S^T \; ?$$

$$\underline{\alpha}^T = (\alpha_1 \; \dots \; \alpha_n)$$

Lösungsraum

Fakt: Die Lösungsmenge eines LGS ist immer entweder $\emptyset$ oder ein aUR.

Einen aUR $E = a + U$ kann man angeben, indem man a und U angibt, oder indem man ein LGS mit Lösungsmenge E angibt.

Aufgabe: Ebene E im $\mathbb{R}^3$ hat Gl. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 6$. $\left(\begin{matrix} A = (1 \; 2 \; -1) \\ b = 6 \end{matrix} \right)$

Finden Sie eine Gl. für

a) die Ebene $F \parallel E$ durch 0.

b) eine weitere Ebene G, die wie E $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält.

Lsg: a) Setze $b \to 0$. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. $\quad F$ UR, $F = U = \ker A$

b) z.B. $\quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$

nochmal b)

allg. Gl. für G:

$a'_{11}\ x_1 + a'_{12}\ x_2 + a'_{13}\ x_3 = b'_1$

mit $6a'_{11} = b'_1$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in G \right)$

$2a'_{11} + 2a'_{12} = b'_1$ $\quad \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in G \right)$

$\Rightarrow a'_{13}$ bel., a'_{11} bel. z.B. $a'_{11} = 1$

$\Rightarrow b'_1 = 6$, $a'_{12} = 2$, d.h.

$x_1 + 2x_2 +$ bel. $x_3 = 6$.

oder $x_3 = 0$

Zeilenumformungen

Z_1: $R_i \longleftrightarrow R_j$

Z_2: $R_i + \lambda R_j$

Z_3: λR_j mit $\lambda \neq 0$.

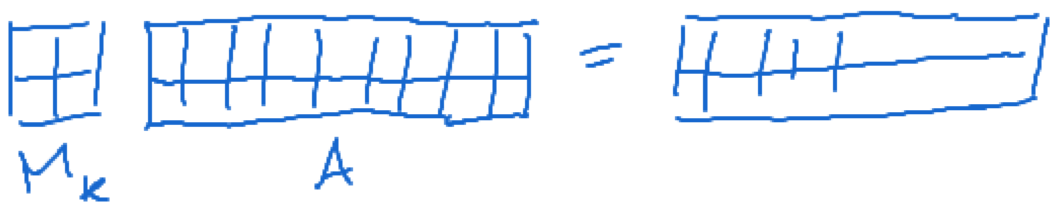
gauß: reichen Z_1, Z_2
(s. Video 031).

Fakt: Wendet man Z_k auf $(A|b)$ an, so ändert sich die Lsgsmenge von $Ax=b$ nicht.

Aufg: Finde 2×2 Matrizen M_1, M_2, M_3 so, dass $\forall A \in M(2\times n, \mathbb{K})$:

$M_k A = Z_k(A)$. $(i=1, j=2)$.

Antwort:



$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots \\ a_{11} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots \end{pmatrix}$$

Gauß-Verf.

es gibt nicht "die" ZSF von A.

$A \xrightarrow{\text{Gauß}} A'$. in ZSF

Alle ZSFen von A haben denselben Kern und denselben Rang.

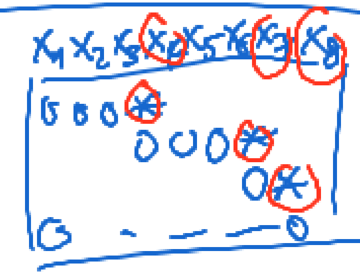
∃ versch. Varianten. Das "reine" Gauß-Verf (s. Video 031):

Falls $a_{11}=0$: Z_1

Falls $a_{11}\neq 0$: Z_2 $(j=1)$ $\forall i>1$ so, dass $a_{i1}=0$ wird.

Dann sind Zeile 1 und Spalte 1 fertig, mit dem Rest wiederholen.

A:



Pivot-Einträge

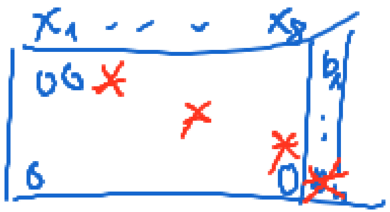
\# Pivot = Rang

Pivot-Variablen = in deren Spalten Pivots stehen

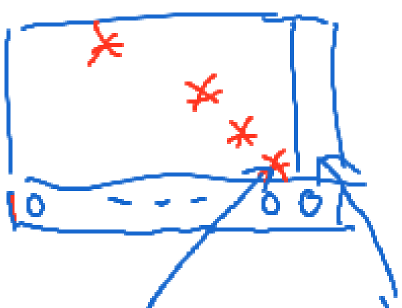
freie Var. = sonst

$Ax = b$

$(A|b)$



$0x_1 + \dots + 0 \cdot x_g = *$



$p_g \, x_g = b$