Symm. Matrizen

Bek $\underset{m\times n}{R}^T R$ und $\underset{m\times n}{R}\,\underset{n\times m}{R^T}$ sind stets symm.

Bew $(R^T R)^T = R^T \underbrace{(R^T)^T}_{R} = R^T R$

und $(RR^T)^T = (R^T)^T R^T = RR^T$. $\square$

Aufg: Zeige: Wenn A symm., dann auch $\underset{m\times n}{R^T}\,\underset{n\times n}{A}\,\underset{n\times m}{R}$.

Bew $\underline{(R^T A R)^T} = (R^T (AR))^T = (AR)^T R$

$= R^T A^T R \overset{A=A^T}{=} \underline{R^T A R}$. $\square$

Bem $(ABCDE)^T = E^T (ABCD)^T = E^T D^T (ABC)^T = \underline{E^T D^T C^T B^T A^T}$

Aufg: Wenn jede Zeile von $A \in M(4,\mathbb{R})$ $0,1,2,3$ in bel. Reihenf. enthält, kann A symm. sein? Inv. bar?

<u>Antw</u>

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

ist symm. Inv. bar?

Bring A auf ZSF:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \quad \left| \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{matrix} \right| \Rightarrow \text{Inv. bar}$$

Signum

Fakt: Jede Transposition σ_{ij} hat $\mathrm{sgn}(\sigma_{ij}) = -1$

(ÜA 28b)

Fakt: $\mathrm{sgn}(\pi_1 \pi_2) = \mathrm{sgn}(\pi_1)\,\mathrm{sgn}(\pi_2)$

$(-1)^{n+m} = (-1)^n (-1)^m$. (ÜA 28c)

Vorl. 038: Jede Perm π ist Produkt von Transpositionen.

$\pi = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_r$

$= \tilde{\tau}_1 \tilde{\tau}_2 \cdots \tilde{\tau}_{\tilde{r}}$

möglicherweise $\tilde{r} \neq r$.

$\tilde{r}$ ger $\Leftrightarrow$ r ger.

$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^r$.

Parität = ger. oder unger.

$\Rightarrow$ $\mathrm{sgn}(\pi) = +1$ wenn π Prod. von gerade vielen Transp.

$\mathrm{sgn}(\pi) = -1$ wenn π Prod. von ungerade vielen Transp.

<u>Aufg</u> Signum von zyklischer Permutation K_n

a) $\operatorname{sgn}\left(123 \xrightarrow{K_3} 231\right) = ?$

b) $\operatorname{sgn}\left(1234 \xrightarrow{K_4} 2341\right) = ?$

c) $\operatorname{sgn}\left(12345 \longrightarrow 23451\right) = ?$

d) $\operatorname{sgn}\left(12\ldots n \xrightarrow{K_n} 23\ldots n1\right) = ?$

<u>Antw</u> a) $123 \to 321 \to 231$ 2 Transp. $\Rightarrow \operatorname{sgn} = +1$

b) $1234 \to 2134 \to 2314 \to 2341$ 3 Transp., -1

c) $12345 \to 21345 \to 23145 \to 23415 \to 23451$, $+1$

d) $12\ldots n \to 213\ldots n \to 2314\ldots n \to 23\ldots n1$ $n-1$ Transp.

$$\operatorname{sgn} = (-1)^{n-1}$$

Beh $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)$

Bew 1 ~~…~~ Ü A28 c $\operatorname{sgn}(\pi^{-1})\operatorname{sgn}(\pi) = \operatorname{sgn}(\pi^{-1}\pi) = \operatorname{sgn}(id) = +1$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \frac{1}{\operatorname{sgn}\pi} = \operatorname{sgn}\pi.$ $\square$

Bew 2 $\pi = \underline{\tau_1 \cdots \tau_r}$, $\pi^{-1} = \underline{\tau_r \cdots \tau_1}$

$(\tau^{-1} = \tau)$ $\qquad \tau_1 \cdots \underbrace{(\tau_r \tau_r)}_{id} \cdots \tau_1 = id.$ $\square$

Aufg $\pi := \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \cdots n \longrightarrow (k+1)(k+2) \cdots n\ 1\,2 \cdots k \end{pmatrix}$, $\operatorname{sgn}(\pi) = ?$

Antw $\operatorname{sgn}(\kappa_n) = (-1)^{n-1}$. $\quad \pi = \kappa_n^k$.

$1\,2\,3 \ldots n$
$2\,3 \ldots n\,1$
$3 \ldots n\,1\,2$

Ü A28c: $\operatorname{sgn}(\kappa_n^k) = \operatorname{sgn}(\kappa_n^{k-1})\operatorname{sgn}(\kappa_n)$

$= \operatorname{sgn}(\kappa_n) \cdots \operatorname{sgn}(\kappa_n) = (\operatorname{sgn}(\kappa_n))^k = (-1)^{(n-1)k}$

Aufg Wie viele gerade und ung. Perm. gibt es in S_n?

Antw $\frac{n!}{2}$ und $\frac{n!}{2}$ $(n \geq 2)$, $n=1$: 1 ger., 0 ung.

τ Transp. $M_\tau : \pi \longmapsto \tau\pi$

$M_\tau : S_n \longrightarrow S_n$

$M_\tau\{\text{ger}\} \subseteq \{\text{ung.}\}$ $\quad M_\tau(\tau\pi) = \tau\tau\pi = \pi$

$M_\tau\{\text{ung.}\} \subseteq \{\text{ger.}\}$

$\pi : \{1..n\} \to \{1..n\}$. $M_\tau \circ M_\tau = id_{S_n}$

$\pi \xmapsto{M_\tau} \tau\pi \xmapsto{M_\tau} \tau\tau\pi = \pi$. $\Longrightarrow M_\tau$ bij. $\square$

Determinanten

Wichtige Fakten:

- $\det(A)$ ist definiert für $A \in M(n, \mathbb{K})$
- $\det(E_n) = 1$
- $\det(A) = 0 \iff A$ nicht invertierbar (singulär) $\iff \operatorname{Rang} A < n$.
- $\det(A) = \pm \operatorname{Vol}(\text{Parallelotop}(a_1 \dots a_n))$
- 1×1: $\det(A) = a_{11}$
- 2×2: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- multilinear in Spalten (oder in Zeilen)
- ändert Vorzeichen bei Transpos. zer Spalten / Zeilen

- Wenn 2 Spalten/Zeilen gleich, dann $\det A = 0$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- Wenn $\det(A) \neq 0$, dann $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.

$\det A^T = \det A$

Bew: Bew geht einfacher:

Setze $D(A) := \det(A^T)$, zeige D Det.-form.

a) multilin.

b) alternierend: benutze Laplace-Entw.

Einfacher: Wenn 2 Argumente in D gleich, 2 Spalten von A gleich, dann

$n >$ Spaltenrang$(A) =$ Zeilenrang$(A) =$ Spaltenrang(A^T)

also (Satz 4.2) $\det(A^T) = 0$, also $D(A) = 0$.

Aufg Wahr oder falsch?
Wenn A inv.-bar und B singulär, dann ist AB singulär.

Antw $\det(AB) = \det(A)\underbrace{\det(B)}_{0} = 0 \Rightarrow AB$ singulär.
Wahr.

Noch mehr wichtige Fakten:

- det ändert sich nicht bei Z_2: $R_i + \lambda R_j$
- Wenn eine Spalte (oder Zeile) 0 ist, dann $\det = 0$.
- Wenn Spalten/Zeilen lin. abh., dann $\det = 0$
- Wenn A' aus A durch Permutation π der Spalten entsteht, dann $\det(A') = \mathrm{sgn}(\pi)\det(A)$.

- für Diagonalmatrix ist

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}\end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

- für obere/untere Dreiecks-matrix ist $\det = a_{11} \cdots a_{nn}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

- Lässt sich A durch Z_2 auf ZSF A' bringen, ~~dann~~ und ist Rang $A' = n$, dann ist Produkt der Pivots $= \det(A)$.

- Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

- Jede Multilinearform vom Grad m auf $\mathbb{K}^n$, $F(x_1 \dots x_m)$, kann durch n^m Koeffizienten $c_{i_1 \dots i_m}$ ("Tensors") $(i_k = 1 \dots n)$ beschr. werden:

$$c_{i_1\ldots i_m} = F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$$

$$\Rightarrow F(x_1 \ldots x_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} c_{i_1\ldots i_m} \, x_{1 i_1} x_{2 i_2} \cdots x_{m i_m}$$

mit $x_k = \sum_{i=1}^{n} x_{ki} e_i$

∘ $F = \det$, $m = n$: $c_{i_1\ldots i_n} = \varepsilon_{i_1\ldots i_n}$ "Levi-Civita-Symbol"

$$= \det(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i_j = i_k \text{ für } j \neq k \\ & \text{d.h. falls } (i_1 \ldots i_n) \text{ keine Permutation ist} \\ \operatorname{sgn}(\pi) & \text{falls } (i_1 \ldots i_n) = (\pi(1), \ldots, \pi(n)) \end{cases}$$

und das ist Leibniz!

- Laplace-Entwicklungssatz:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

A_{ij} entsteht durch Weglassen von Zeile i und Spalte j.