Aufgabe 30

"Jeder UR von $\mathbb{R}^n$, der mind. aber nicht nur die Vielfachen von 111111 enthält und perm-inv. ist, ist ganz $\mathbb{R}^n$."

Wo das Problem herkommt:

QM: $\underbrace{\{\text{Wellenfunktionen}\}}_{\substack{\text{zur Vereinfachung} \\ \text{beschr. Energie}}}$ ist $\mathbb{C}$-VR

$\mathbb{R}$-VR, dim $=\infty$, aber

$\Rightarrow$ UR $\mathcal{H}$ mit $\dim \mathcal{H} = n < \infty$.

von einer W'keitsverteilung über Wellenfktnen ist nur sog. Kovarianzmatrix ρ messbar und heißt Dichtematrix.

$p \in \mathcal{S}(n, \mathbb{R})$, $\rho : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Prof. Chen und ich studierten typische ρ und dafür Gleichverteilung u über alle p. Kovarianzmatrix von u, benutzen Symmetrie von u gegenüber Rotation von $\mathcal{H}$.

Brauchten: Jeder UR von $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$, der mind. aber nicht nur die Vielfachen von E_n enthält, ~~ist~~ und ~~r~~ rotations-inv. ist, ist ganz $\mathcal{S}(n, \mathbb{R})$.

Eigenwerte

Def Sei V $\mathbb{K}$-VR; $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt Eigenwert ~~von~~ des Endo $L: V \to V$, wenn $\exists\, v \in V \setminus \{0\}$:

$$Lv = \lambda v.$$

v heißt Eigenvektor

Eigenraum $E_\lambda = \{\text{EVen}\} \cup \{0\}$ UR von V

Spektrum$^{(L)}$ $= \{\text{EWe}\}$.

Aufg: v EV, wie findet man EW λ?

(ÜA 34 Blatt 9) λ EW, wie findet man v?

$$M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad L b_i = a_{ii} b_i$$

Antwort: a) $L_{\lambda_{v_{11}}} v = \lambda v$, vergleiche mit v

b) $(L - \lambda\, id) v = 0$, $v \in \mathrm{Kern}(L - \lambda\, id)$

LGS

Aufgabe: Seien $A \in M(n, \mathbb{K})$ und $x_1 \dots x_r \in \mathbb{K}^n$ EVen mit EWen $\lambda_1 \dots \lambda_r$. Was kann man sagen über

a) die EVen und EWe von $A+E$?

b) die EVen und EWe von A^2?

Antwort: $A x_j = \lambda_j x_j$.

a) $(A+E) x_j = (\lambda_j + 1) x_j$, x_j ist EV mit EW $\lambda_j + 1$.

b) $A^2 x_j = A(A x_j) = A(\lambda_j x_j) = \lambda_j A x_j = \lambda_j^2 x_j$

x_j ist EV mit EW λ_j^2

Def geom. Vielfachheit

$g_L(\lambda) = \dim E_\lambda$.

Def char Poly

$P_L(\lambda) = \det(L - \lambda\, id)$

(ist def. falls $\dim V < \infty$)

Äquiv. Def: $P_L(\lambda) = \det(\lambda\, id - L)$

unterscheidet sich um Faktor $(-1)^n$.

$\det(2A) = 2^n \det(A)$

$\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Fakten:

- grad $P_L = \dim V = n$
- Die Nullstellen von P_L sind die EWe von L.
- niedrigster Koeff. von P_L ist $\det(L)$, höchster ist $(-1)^n$, 2t höchster ist $(-1)^{n-1}$ Spur L.

Bem Die EWe von AB sind i. Allg. nicht die Produkte der EWe von A und B.

Die EWe von $A+B$ sind i. Allg. nicht die Summen der EWe von A und B.

Bew $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (Pauli-Matrizen)

A hat char Poly $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$, also EWe ± 1.

$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat char. Poly $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ also EWe $\pm i$.

$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat $P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1$

$= \lambda^2 - 2$, also EWe $\pm\sqrt{2}$. $\square$

Aufgabe: a) Finde Bsp, dass $Z_2(R_i + \lambda R_j)$ die EWe einer Matrix A ändern kann.

b) Bei Z_2 ändert sich nicht, ob 0 EW ist. Warum?

Antwort: a) z.B. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat EWe 0 und 1.

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. $A \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$ hat EWe 0

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$

b) 0 EW $\iff$ Kern $L \neq \{0\}$ $\iff$ dim Kern $L > 0$.

Z_2 ändert nicht den Kern.

Def alg. Vielfachheit $a_L(\lambda)$ = Vielfachheit der Nullst. in P_L

Fakten:

- $g_L(\lambda) \leq a_L(\lambda)$
- In $\mathbb{C}$ gilt $\sum_\lambda a_L(\lambda) = n$
- Fundamentalsatz der Algebra:
  In $\mathbb{C}$ hat jedes Poly vom Grad n genau n Nullst.
- Bei einer oberen (oder unteren) Dreiecksmatrix A
  sind a_{ii} die EWe.

  Denn: $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & & a_{ij} \\ & a_{22}-\lambda & \\ 0 & & \ddots \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots$
  $\cdots(a_{nn}-\lambda)$

Def Endo $L: V \to V$ heißt <u>diagonalisierbar</u>,
wenn $\exists$ Basis von V aus EVen von L.