Diagonalisierung

Def Endo $L: V \to V$ heißt

diagonalisierbar $\Leftrightarrow$

$\exists$ Basis aus EVen

"Eigenbasis". $\Leftrightarrow$

$\exists$ Basis $\mathcal{B}$: $M_{\mathcal{B}}(L)$ ist diag.

Aufg: Zeige, dass $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

nicht diag.bar ist.

Antw.

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$

EWe: 0.

$\operatorname{Kern} A = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Alternativ: Wäre

diag bar, dann

$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 0$

$A = SDS^{-1} = 0$ $\lightning$

Fakten: $K = \mathbb{C}$

- A diagbar $\iff$ $g(\lambda) = a(\lambda)$ $\forall \lambda$ EW

(Erinnerung: $g(\lambda) \leq a(\lambda)$ $\forall \lambda$)

- A diagbar $\overset{\forall K}{\iff}$ $\sum_{\lambda} g(\lambda) = n$.
- Diagbarkeit erfordert genug EVen
- Invertierbarkeit erfordert dass $\underline{0}$ kein EW ist.
- Diagonalisierung

$A = SDS^{-1}$, wobei D diag. und die Spalten von S die EVen (d_{ii} = EWe)

$(S e_i = s_i, \quad S^{-1} s_i = e_i)$

$$d_{ii} s_i \xleftarrow{S} d_{ii} e_i \xleftarrow{D} e_i \xleftarrow{S^{-1}} s_i$$

- A diagbar $\Leftarrow$ A hat n versch. EWe ($a(\lambda) = 1 \Rightarrow g(\lambda) = 1$)

Aufg Wenn
$A = SDS^{-1}$ und
$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, was
ist A^{100}?

Antwort

$A^{100} = SD(\cancel{S^{-1}S})DS^{-1} \ldots$
$= S D^{100} S^{-1}$
$= S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{100}} \end{pmatrix} S^{-1}$

Bem: $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \lim\limits_{k\to\infty} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} S^{-1}$
$= S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$.

Bsp Tierpopulation.

Alter 1 Jahr: 3 Junge pro Elternpaar

Alter 2 Jahre: 2.

$x_{1,2}$ = Anzahl 1,2-jährige

$x(t+1) = A\,x(t)$ mit $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$x(t+k) = A^k x(t)$

Bem: Finden von EVen

weiß: λ EW,

EVen = Lsgen von $(A-\lambda E)x=0$

n gl.en, $\leq n-1$ lin. unabh.

1 Faktor frei wählen

(z.B. 1 Komp. von x wählen)

Rechnung erleichtert durch

z.B. $x_1=1$.

(3 Vorteile: schneller, weniger Fehler, durchsichtiger)

Aufg: Angenommen, die einzigen EVen von A sind die Vielfachen von $x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Wahr oder falsch?

a) A ist nicht inv.bar

b) A hat einen alg-vielfachen EW.

c) A ist nicht diag.bar.

Antwort: 1 ER $=\mathbb{R}x$, 1 EW λ, $g(\lambda)=1$, $a(\lambda)=3$.

a) im Allg. falsch b) wahr c) wahr

Skalarprodukt

Bsp: $\mathbb{R}^n$: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \underline{x}^T \underline{y}$

$\mathbb{C}^n$: $\langle x, y \rangle = \bar{x}^T y$

Def $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, V K-VR

Sk. prod. $\langle \, , \rangle : V \times V \to K$, die

- bilinear / sesquilinear
- symmetrisch / hermitesch,

  $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- positiv definit,

  $\langle u, u \rangle > 0 \quad \forall u \neq 0$

  $\left(\Leftrightarrow \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ und } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0 \right)$

Def Norm $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$

mit

- homogen $\| \alpha u \| = |\alpha| \, \| u \|$
- definit $\| u \| > 0 \quad \forall u \neq 0$
- Δ-Ungl

  $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

$\| u \|_{\langle , \rangle} = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.