

Skalarprodukt

Def $u \perp v ; \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$.

Beim $0 \perp v \quad \forall v$
insbes. $0 \perp 0$.

und $v \perp v \Rightarrow v=0$
denn $\langle v, v \rangle = 0 = \|v\|^2$
pos. definit $\Rightarrow v=0$.



Beim Wenn $\|u\|=1$, dann
ist $\langle u, v \rangle$ die Komp. von
 v in Richtung u :

D.h. wenn $v = v_{\parallel} + v_{\perp}$
mit $v_{\parallel} = \lambda u$ und $v_{\perp} \perp u$,
dann $\langle u, v \rangle = \langle u, v_{\parallel} + v_{\perp} \rangle$
 $= \langle u, \lambda u \rangle + \langle u, v_{\perp} \rangle$
 $= \lambda \|u\|^2 + 0 = \lambda$.

Aufg

a) Ist $\perp$ eine Äq. rel.?

b) Und $\neq$, d. h.

$$u \neq v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle \neq 0?$$

Antwort a) Nein, nicht reflexiv,
nicht transitiv.

b) Nein, nicht reflexiv,

nicht transitiv



$$\begin{aligned} 0 = \langle v_k, 0 \rangle &= \langle v_k, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{=0 \text{ } \forall j \neq k} \\ &= \alpha_k \underbrace{\|v_k\|^2}_{\neq 0} \Rightarrow \alpha_k = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Bew Sind $v_1 \dots v_n$
alle $\neq 0$ und paarw.
orthogonal, dann sind
sie lin. unabh.

(Lemma 6.9 ähnlich,
verlangte aber orthonormal)

Bew Wenn $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$,
nimme $\langle v_k, \cdot \rangle; j=1$
 $= 0 \text{ } \forall j \neq k$

Fakt: In $\mathbb{R}^n$ ist

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \varphi$$



Aufg Mittelwinkel im
regulären Tetraeder = ?
(Bsp. Methan CH_4)

Tipp Ecken $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
haben alle Abstand $\sqrt{2}$,
Mittelpunkt $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Ausw $ME_1 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$ME_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\langle ME_1, ME_2 \rangle = \underbrace{\|ME_1\|}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \underbrace{\|ME_2\|}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cos \phi$$
$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cos \phi = -\frac{1}{3} \Rightarrow \phi \approx 109,47^\circ$$

Orthonormalbasis

Sei V Skpr.R.

Kronecker-
↓ Symb.

Def $\{v_1 \dots v_n\}$ Orthonormalsystem (ONS) : $\Leftrightarrow \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

~~$\{v_1 \dots v_n\}$~~ Eine Basis, die ONS ist,
heißt ONB.

$$= \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Bsp In $\mathbb{R}^3$ $\{e_1, e_2, e_3\}$ ist ONB, $\{e_1, e_2\}$ ist ONS

Wir wissen:

- ONS ist stets lin. unabh., aber mögl. kein EZS.

- $\{v_1 \dots v_n\}$ ONS $\Leftrightarrow \{v_1 \dots v_n\}$ ist ONB von $\text{span}\{v_1 \dots v_n\}$

Man unterscheidet rechtshändige und links

händige

^{geordnete} ONBen.
($v_1 \dots v_n$) (Händigkeit = Orientierung, vgl. ÜA 38 Bl 9)

Adjungierte Matrix

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$

Def $A^* := \overline{A}^T = \overline{A^T}$

$A^\dagger$

Wichtige Eigenschaft:

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n: \langle u, Av \rangle = \langle A^* u, v \rangle$$

$$\text{und } \langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle.$$

Bew $\langle u, Av \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{u_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$

$$= \sum_{ij} \overline{u_i} a_{ij} v_j = \sum_j \left(\sum_i \overline{a_{ij}} u_i \right) v_j$$

$$= \langle A^* u, v \rangle_{\mathbb{C}}$$

Orthogonale Matrix

Def $Q \in M(n, \mathbb{R})$ heißt orthogonal : $\Leftrightarrow Q^T Q = E$

$Q \in M(n, \mathbb{C})$ heißt unitär : $\Leftrightarrow Q^* Q = E$.

$v_1 \dots v_n$ ONB, $u = \sum \alpha_i v_i$, $w = \sum \beta_i v_i$

$$\langle u, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i \beta_i$$

Fakt: Q ist orthogonal/unitär $\Leftrightarrow$ Spalten bilden ONB. $= \delta_{ij}$

$$(A^T B)_{ij} = a_{i\Box} b_{\Box j} = \boxed{\quad} \boxed{\quad} = \Box = q_i^T q_j = \langle q_i, q_j \rangle$$

geometrisch:

orthogonales Q ist Drehung / Spiegelung / Drehspiegelung /
mehrere Drehungen / Drehspiegelungen.

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Aufgabe Zeige!

a) Wenn Q_1 und Q_2 orthogonal sind, dann auch $Q_1 Q_2$.

b) Wenn Q orth., dann auch Q^{-1} .

Antwort a)
$$(Q_1 Q_2)^T (Q_1 Q_2) = Q_2^T \underbrace{Q_1^T Q_1}_{E} Q_2$$
$$= Q_2^T Q_2 = E.$$

b) $Q^{-1} = Q^T$, $Q Q^{-1} = E \Rightarrow Q Q^T = E$

$$(Q^{-1})^T Q^{-1} = (Q^T)^T Q^T = Q Q^T = E.$$

$Q^T Q = E$

Zeige: $(Q^{-1})^T Q^{-1} = E$

Folgerung

orthog. Q bildet
jede ONB auf eine
ONB ab.

Orthogonale Projektion

mögl. Def: L ist Projektion $\Leftrightarrow \exists$ Basis $B: M_B(L)$ diag und
alle Diagonaleinträge 0 oder 1 sind.

L ist orth. Proj. $\Leftrightarrow \exists$ ONB $B: M_B(L)$ diag und alle Diag.eintr. 0 oder 1 sind.

orth. Projektionen sind
keine orthogonalen Matrizen! (außer $\mathbb{E}$)

P ist $\begin{cases} \text{entweder } \mathbb{E} \\ \text{oder nicht inv. bar} \end{cases}$

Q orth $\Rightarrow Q$ inv. bar, $Q^{-1} = Q^T$.

nicht-orth. Proj.



orth. Proj.

