~~Orth. Proj.~~

Unitäre Matrizen

V $\mathbb{C}$-VR, $\langle \cdot , \cdot \rangle$

<u>Def</u> $U: V \to V$ unitär

$:\iff \|Uv\| = \|v\| \ \forall v \in V$ und U surj.

<u>Fakt</u> U unitär $\Rightarrow \langle Uu, Uv \rangle = \langle u, v \rangle \ \forall u, v \in V$.

<u>Fakt</u> U unitär $\iff U^* = U^{-1} \iff U^* U = \mathrm{id}_V$

und $U U^* = \mathrm{id}_V$

<u>Fakt</u> $A \in M(n, \mathbb{C})$ unitär $\iff A^* = A^{-1}$.

<u>Fakt</u> $A \in M(n, \mathbb{C})$ unitär $\iff$ Spalten ONB.

<u>Fakt</u> Sei $A = M_{\mathcal{B}}(U)$ und $\mathcal{B}$ ONB. Dann U unitär $\iff A$ unitär.

~~Orth. Proj.~~

Orth. Proj.

mögl. Def: $P \in M(n,K)$ ist orth. Proj. $:\Longleftrightarrow \exists$ ONB: $M_{\mathcal{B}}(P)$ diag. und alle Einträge 0 oder 1

andere (äq.) Def: $P \in M(n,K)$ ist orth. Proj. $\Longleftrightarrow P^2 = P$ und $P^* = P$.

Merke: Wenn $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\| = 1$, dann $P_u = u u^T$.

Wenn $u \in V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, mit $\|u\| = 1$, dann $P_u = u \langle u, \cdot \rangle$

(d.h. $P_u v = u \langle u, v \rangle$. QM-Notation $\overset{\text{bracket}}{\langle u | v \rangle}$, $u = \overset{\text{ket}}{|u\rangle}$, $\underset{\text{bra}}{\langle u|} = \langle u, \cdot \rangle$ ~~ket~~

$P_u = |u\rangle\langle u|$)

Beweis: Wenn $v = \lambda u + v_\perp$, dann

$$u\langle u, v\rangle = u\langle u, \lambda u + v_\perp\rangle = u\Big(\lambda \underbrace{\langle u, u\rangle}_{1} + \underbrace{\langle u, v_\perp\rangle}_{0}\Big) = \lambda u. \quad \square$$

~~Aufgabe~~

$$P_U = \sum_{i=1}^{r} |u_i\rangle\langle u_i|$$

$u_1 \dots u_r$ ONB von U

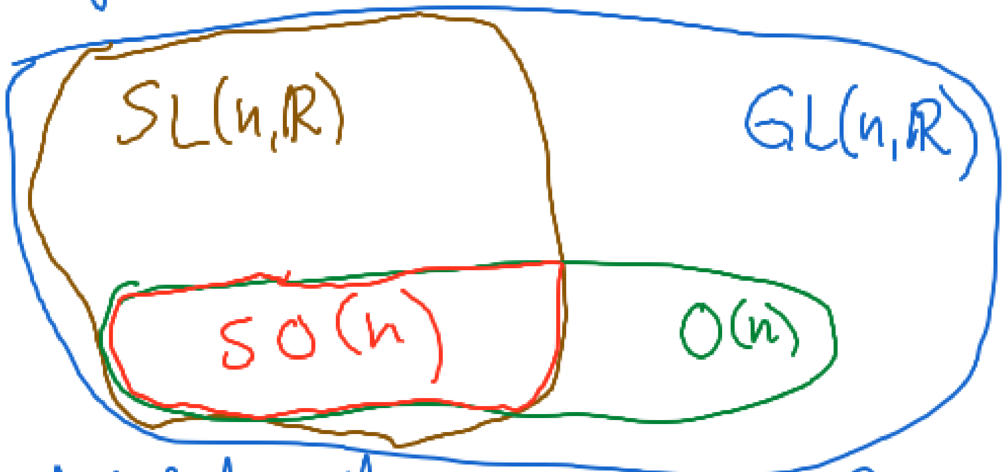
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 0 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \underset{\uparrow\, r}{1} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}_{n-r} \end{pmatrix}$$

<u>Aufgabe</u> $u = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechne $P_u = u u^T$.

<u>Antwort</u> $P_u = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}.$

Matrixgruppen



$GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : A \text{ inv.bar}\}$

$\to SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$

$O(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : A^T A = E\}$

$SO(n) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : A^T A = E \text{ und } \det A = 1\}$

Aufg Welche Mengen sind Gruppen?

a) $\{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A = 5\}$ nein

b) $\det A = -1$ nein

c) $\det A = 1$ ja

d) $\det A = 0$ nein

e) $\{A \in M(n,\mathbb{C}) : |\det A| = 1\}$ ja

$|\det AB| = |\det A||\det B| = 1$, $|\det A^{-1}| = |(\det A)^{-1}| = |\det A|^{-1} = 1$

f) $\{A \in M_a(n,\mathbb{C}) : A \text{ diagonal}\}$ nein

g) $\{A \in M(n,\mathbb{C}) : A \text{ diagonal und } \det A \neq 0\}$ ja

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$.

<u>Def</u> Symmetriegruppe (M)

$:= \{A \in O(3) : A(M) = M\}$.

("Decktransformationen",

alternativ aus $SO(3)$)

<u>Beweis</u>: $A(M) = M$

$B(M) = M$

$AB(M) = A(M) = M$.

~~$A^{-1}(M)$~~ $A(M) = M$

$M = A^{-1}A(M) = A^{-1}(M)$ $\square$

<u>Aufgabe</u> Symmetriegruppe(Oktaeder) $= ?$

<u>Tipp</u> Oktaeder = konvexe Hülle$(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, -e_1, -e_2, -e_3\}$.

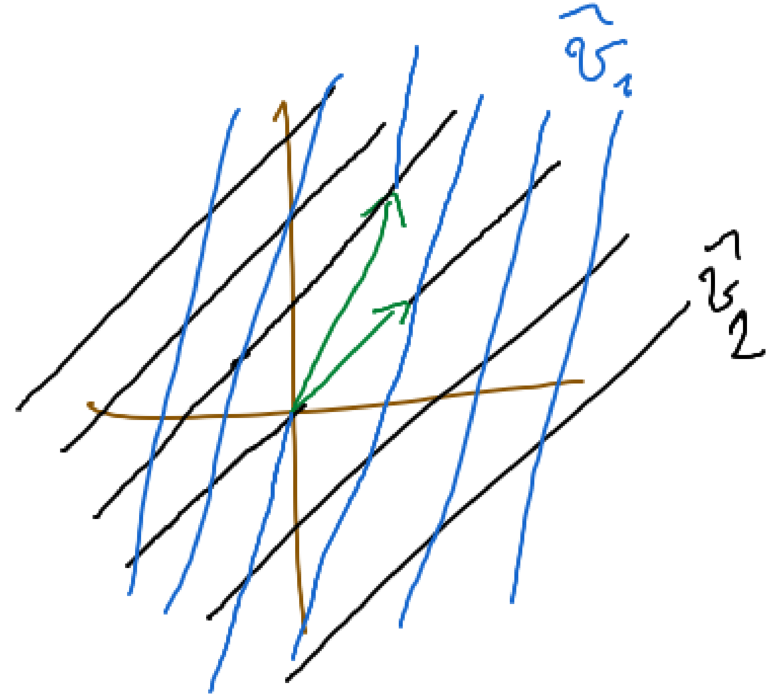
<u>Antw</u> $A(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

$\left\{ \begin{pmatrix} \pm e_{\pi(1)} & \pm e_{\pi(2)} & \pm e_{\pi(3)} \end{pmatrix}, \pi \in S_3 \right\}$

hat $6 \cdot 8 = 48$.

Duale Basis

Def: duale Basis zu $\{v_1 \dots v_n\}$
erfüllt $\hat{v}_i(v_j) = \delta_{ij}$.



Bsp In $\mathbb{R}^2$ Basis

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\hat{v}_1 = (2 \quad -1), \hat{v}_2 = (-1 \quad 1)$

$\hat{v}_1(v_1) = 1 = \hat{v}_{11} \cdot 1 + \hat{v}_{12}$.

$0 = \hat{v}_{11} + 2\hat{v}_{12}$.