Selbst-adjungiert

Def $A \in M(n,K)$ heißt selbst-adj. $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\overline{A}^T}_{A^*} = A$

$L: V \to V$ Sk.pr.R heißt selbst.-adj. $\Leftrightarrow$ $\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle \; \forall u,v \in V$

Fakt Sei $\mathcal{B}$ ONB von V; L s.a. $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{B}}(L)$ s.a.

Spektralsatz: Wenn $A = A^*$, dann $\exists$ ONB aus EVen.

$\Longleftrightarrow$ Dann $A = SDS^{-1}$ mit D diag. und S unitär/orth.

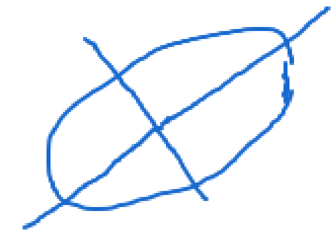
"A ist unitär diag.bar"

Bsp reelles Poly $P(x_1, \dots, x_n)$ vom Grad 2 hat die Form

$P(x) = c + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ mit $A = A^T$. Die Richtungen

der EVen von A heißen Hauptachsen von P.
Durch Verschieben des Ursprungs kann man $b_i = 0$ machen.

Bsp $P(x) = c' \iff \langle x, Ax \rangle = c' - c$



Bem

- Wenn $A = A^*$, dann sind ~~EW~~ EVen zu verschiedenen EWen orthogonal.
- Um eine ONB aus EVen zu bestimmen, hat man Wahlfreiheiten:
  - In einem 1-dim ER: Phasenfaktor $e^{i\theta}$ in $\mathbb{C}$, oder Vorzeichen in $\mathbb{R}$.
  - In einem höher-dim ER: Wahl einer ONB im ER.

  (Bem: $(A - \lambda E)x = 0$ Gauß-Verf. liefert Basis, Gram-Schmidt macht daraus ONB.)

Bsp: Wieviele ONBen in $\mathbb{R}^3$ aus EVen hat $A = \mathrm{diag}(2,3,4)$? 8.
$A = \mathrm{diag}(2,3,3)$? ∞

Positiv definit

Def: $A = A^*$ heißt
pos. def. $\Leftrightarrow$ alle EWe > 0
pos. semidef. $\Leftrightarrow$ alle EWe ≥ 0
neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EWe < 0
neg. semidef. $\Leftrightarrow$ alle EWe ≤ 0
indef. $\Leftrightarrow$ manche EWe > 0
manche < 0.

Kriterium

A pos. def. $\Leftrightarrow$ $\langle u, Au\rangle > 0 \quad \forall u \neq 0$.
A pos. semidef. $\Leftrightarrow$ $\langle u, Au\rangle \geq 0 \quad \forall u$.
indef. $\Leftrightarrow$ $\exists u, v:\ \langle u, Au\rangle > 0,\ \langle v, Av\rangle < 0$.

Bem A neg. def. $\Leftrightarrow$ $-A$ pos. def
semidef.

Aufgabe Sei $A = A^* \in M(2, \mathbb{C})$

$\operatorname{Spur} A = \lambda_1 + \lambda_2$
$\det A = \lambda_1 \lambda_2$
Wie erkenne ich an Spur A und $\det A$, ob A pos. def / indef. ist?

Antwort indefinit $\Leftrightarrow$ $\det < 0$
pos. def $\Leftrightarrow$ $\det > 0$, $Sp > 0$.
neg. def $\Leftrightarrow$ $\det > 0$, $Sp < 0$.

pos. semidef., aber nicht

pos. def. $\Leftarrow$ $\det = 0$, $Sp \geq 0$

$\det = 0$, $Sp = 0$ $\Rightarrow$ $A = 0$.

~~Aufgabe~~ Bem Dualraum

Auf $M(3,\mathbb{R})$ $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\langle A, B\rangle = Sp(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

$$A \overset{A=A^*}{=} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i$$

λ_i: EW$_e$; P_i: orth. Proj auf ER

Spektralzerlegung.

$v_1 \dots v_n$, $\quad P_1 = \sum_{j=1}^{k} v_j \langle v_j, \cdot\rangle$

$v_1 \dots v_k$ EVen zu λ_1

$$A = S\, D\, S^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = S\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Aufgabe

Sei $A = A^T \in M(n, \mathbb{R})$

Wahr oder falsch?

a) Wenn alle $a_{ij} > 0$, dann ist A pos. def.

b) Wenn A pos. def., dann sind alle $a_{ij} > 0$.

c) Wenn alle $a_{ii} > 0$, dann ist A pos. def.

d) Wenn A pos. def., dann sind alle $a_{ii} > 0$.

Antwort

a) Falsch. Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hat EW 0, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ hat $\det = 1^2 - 2^2 = -3$.

b) Falsch. Bsp $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ hat $\det = 4 - 1 = 3$, $Sp = 4$.

c) Falsch, weil a) falsch.

d) Wahr. Bew $a_{jj} = \langle e_j, A e_j \rangle > 0$, Kriterium.

Aufgabe Sei $A = A^* \in M(2, \mathbb{C})$

Wie erkenne ich an a_{11} und $\det A$, ob A pos. def. / indef. ist?

Antwort indefinit $\iff \det A < 0$

$\det A > 0$, $a_{11} > 0 \iff$ pos. def.

$\det A > 0$, $a_{11} < 0 \iff$ neg. def.

$\det A > 0$, $a_{11} = 0$ unmöglich, $\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12}^* & a_{22} \end{pmatrix} = -|a_{12}|^2 \leq 0$

$\det A = 0$, $a_{11} > 0 \implies$ pos. semidef., aber nicht pos. def.

$= 0$, $a_{11} < 0 \implies$ neg. – —.

$\det A = 0$, $a_{11} = 0 \implies |a_{12}|^2 = 0 \implies a_{12} = 0 \implies A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$

Tricks zum Erkennen von pos. Definitheit/Indefinitheit

- Blockdiagonale Matrizen pos. def. $\Longleftrightarrow$ jeder Diag.block ist pos. def.

$$\begin{bmatrix} 3\times 3 & & 0 \\ & 2\times 2 & \\ 0 & & 4\times 4 \end{bmatrix} \qquad A = A^*$$

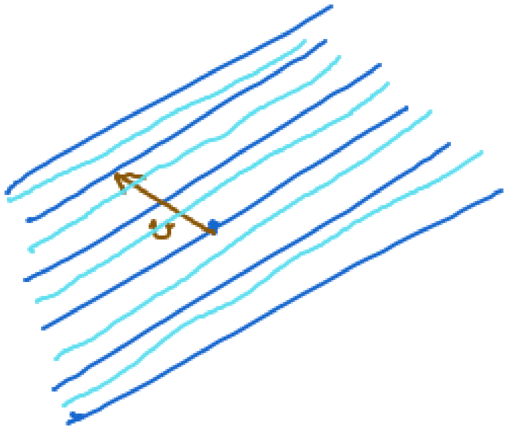
- $A = A^*$ und Wenn Diag.einträge unterschiedl. Vorzeichen haben, dann A indef.
- Wenn $\exists\, a_{ii} = 0$, ist A nicht def.
- Wenn $A = A^* \in M(n, K)$ pos. def., dann ist auch die linke obere $k \times k$-Teilmatrix A_k pos. def.

$$A = \begin{array}{c} \\ k \end{array}\begin{bmatrix} \boxed{A_k} & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

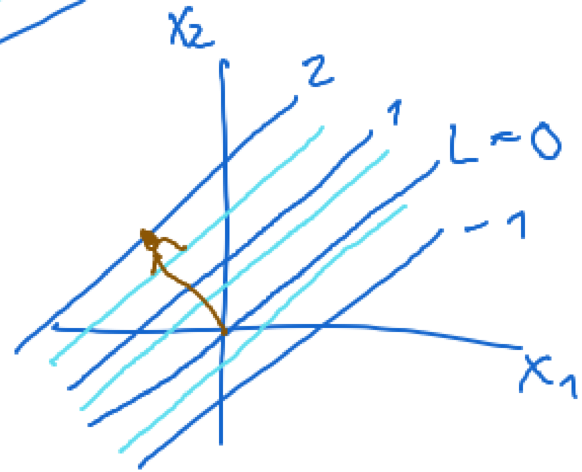
Kriterium: $\langle u, Au\rangle > 0$ $\forall u \neq 0$, $u = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\Big\}k$, $\langle u, Au\rangle = \langle u, A_k u\rangle > 0 \Rightarrow A_k$ pos.

Bem: Wenn $A = A^* \in M(n, K)$ $\det(A_k) > 0$ $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, dann ist A pos. def.

Dualraum



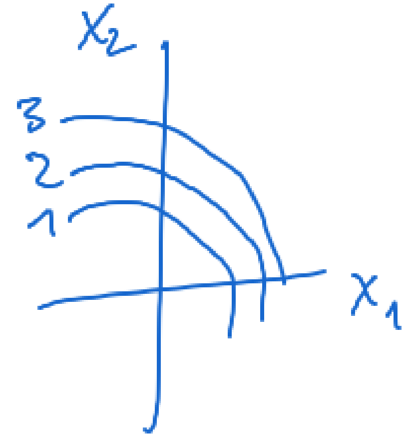
$L(v) = 2$



$\{ v : L(v) = c \}$

$L^\#: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Konturdiagramm



f